Über die Vertauschbarkeit subnormaler Untergruppen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

vorgelegt von

Josef Hainzl
aus Reiterschlag/CSR

1962

7135

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549607_0056

Über die Vertauschbarkeit subnormaler Untergruppen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

vorgelegt von

Josef Hainzl
aus Reiterschlag/CSR

1962

Tag der mündlichen Prüfung: 15. 2. 1962

Dekan: Prof. Dr. W. Braunbek

1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Wielandt

2. Berichterstatter: Prof. Dr. P. Roquette

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Über die Vertauschbarkeit subnormaler Untergruppen

Einleitung

In der Abhandlung [6] entwickelte Wielandt eine Methode zur Untersuchung der Vertauschbarkeit von subnormalen Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{G}$, die eine endliche Kompositionsreihe besitzt. Angeregt durch diese Methode, entstand die vorliegende Arbeit als ein Versuch, die von Wielandt gewonnenen Ergebnisse zu verallgemeinern und die Frage der Vertauschbarkeit von subnormalen Untergruppen als solche eingehender zu untersuchen.

Herrn Professor Wielandt danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele Ratschläge; von ihm stammen insbesondere die in dieser Arbeit eingeführten Begriffe: $\mathfrak{A}^{\Delta}$, Δ -Hut, einhütig, seminormal.

Bezeichnungen: Die betrachteten Gruppen $\mathfrak{G}$ sollen stets, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, eine endliche Kompositionsreihe besitzen. $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{G}, (\mathfrak{A} < \mathfrak{G}), \mathfrak{A} \trianglelefteq \mathfrak{G}, \mathfrak{A} \trianglelefteq \cdot \mathfrak{G}, \mathfrak{A} \trianglelefteq \mathfrak{G}, \mathfrak{A} \trianglelefteq \cdot \mathfrak{G}$ bedeutet der Reihe nach: $\mathfrak{A}$ ist Untergruppe (echte Untergruppe), subnormale Untergruppe, Normalteiler, maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ bezeichnet den Durchschnitt, $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ das Erzeugnis der beiden Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. E soll die nur aus dem Einselement bestehende Gruppe sein. Die subnormalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ bilden einen Verband $s\mathfrak{G}$ (Wielandt [4]). Wenn $\mathfrak{A} \trianglelefteq \mathfrak{B} \trianglelefteq \mathfrak{G}$ ist, dann bezeichne $j(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$ die nach dem Satz von Jordan-Hölder eindeutig bestimmte Länge r einer Kompositionsreihe $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \trianglelefteq \mathfrak{A}_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq \mathfrak{A}_{r-1} \trianglelefteq \mathfrak{A}_r = \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ bis $\mathfrak{B}$. Nach dem gleichen Satz ist auch die Menge der abstrakten einfachen Gruppen, die als Kompositionsfaktorgruppen zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auftreten, eindeutig bestimmt, und wir bezeichnen sie mit $K(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ beliebige subnormale Untergruppen von $\mathfrak{G}$, so ist nach

[4, Satz (9)] $K(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B},\mathfrak{A}) = K(\mathfrak{B},\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})$ und $j(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B},\mathfrak{A}) \geq j(\mathfrak{B},\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})$. Griechische Buchstaben $\Lambda,\Delta,\Pi,\ldots$ sollen Teilmengen der Menge $I = K(\mathfrak{G},\mathfrak{E})$ bedeuten, $\emptyset$ sei immer die leere Menge und $\bar{\Delta} = I-\Delta$ die Komplementärmenge von Δ in I. Eine Faktorgruppe $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ einer subnormalen Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ heißt Δ-Gruppe, wenn $K(\mathfrak{B},\mathfrak{A}) \leq \Delta$ gilt. Zwei Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ nennt man vertauschbar, abgekürzt $\mathfrak{A} \nu \mathfrak{B}$, wenn im Sinne der Komplexmultiplikation $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ ist. Dies ist bekanntlich genau dann der Fall, wenn das Erzeugnis von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit ihrem Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ übereinstimmt. Schließlich definieren wir nach Wielandt: Eine subnormale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ heißt seminormal in $\mathfrak{G}$, wenn sie mit jeder subnormalen Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vertauschbar ist.

Literaturhinweise werden in eckige Klammern gesetzt.

1. Die Gruppen $\mathfrak{A}_\Delta$ und $\mathfrak{A}^\Delta$

Wenn Δ eine beliebige, aber feste Teilmenge von $I = K(\mathfrak{G},\mathfrak{E})$ ist, so bilden wir nach Wielandts Vorgehen [6, Definition 2.1] für jede subnormale Untergruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ den Durchschnitt $\mathfrak{A}_\Delta$ aller subnormalen Untergruppen $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{A}$ mit $K(\mathfrak{A},\mathfrak{X}) \leq \Delta$. Die Gruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_\Delta$ ist die größte Δ-Faktorgruppe von $\mathfrak{A}$. Wielandt zeigte [6, Satz (2.4)], daß die Abbildung $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_\Delta$ ein $\cup$-Endomorphismus von $s\mathfrak{G}$ ist; er bewies:

1.1 Es seien $\mathfrak{A},\mathfrak{B} \subset\subset \mathfrak{G}; \Delta,\Lambda \leq I$. Dann ist $(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B})_\Delta = \mathfrak{A}_\Delta \cup \mathfrak{B}_\Delta$ und $\mathfrak{A}_{\Delta\cap\Lambda} = \mathfrak{A}_\Delta \cup \mathfrak{A}_\Lambda$.

Nun bilden wir dual zu $\mathfrak{A}_\Delta$ die Gruppe $\mathfrak{A}^\Delta$ als das Erzeugnis aller subnormalen Untergruppen $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A} \subset\subset \mathfrak{N} \subset\subset \mathfrak{G}$ und $K(\mathfrak{N},\mathfrak{A}) \leq \Delta$.

1.2 Es ist $K(\mathfrak{A}^\Delta,\mathfrak{A}) \leq \Delta$, also $\mathfrak{A}^\Delta$ die maximale, $\mathfrak{A}$ umfassende subnormale Untergruppe $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ mit $K(\mathfrak{M},\mathfrak{A}) \leq \Delta$. Für $\Lambda \leq I$, $\mathfrak{A}_1 \subset\subset \mathfrak{A} \subset\subset \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} \subset\subset \mathfrak{G}$ gilt ferner: $\mathfrak{A}^{\Delta\cap\Lambda} = \mathfrak{A}^\Delta \cap \mathfrak{A}^\Lambda$, $\mathfrak{A}_1^\Delta \leq \mathfrak{A}^\Delta$ und $(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})^\Delta = \mathfrak{A}^\Delta \cap \mathfrak{B}^\Delta$. Die Abbildung $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^\Delta$ ist also ein $\cap$-Endomorphismus des Verbandes $s\mathfrak{G}$.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus 1.1: Es ist $\alpha^\Delta = \bigcup_{i=1} \eta_i$ mit $K(\eta_i, \alpha) \leq \Delta$, $\eta_i \subseteq \mathfrak{g}$. Damit wird $(\alpha^\Delta)_\Delta = (\bigcup \eta_i)_\Delta = \bigcup \eta_{i\Delta} \leq \bigcup \alpha = \alpha$, also $K(\alpha^\Delta, \alpha) \leq \Delta$. Offenbar ist $\alpha^{\Delta\cap\wedge} \leq \alpha^\Delta \cap \alpha^\wedge$ und wegen $K(\alpha^\Delta \cap \alpha^\wedge, \alpha^{\Delta\cap\wedge}) \leq \Delta \cap \wedge$ folgt nach dem eben Bewiesenen $\alpha^{\Delta\cap\wedge} = \alpha^\Delta \cap \alpha^\wedge$. Ist nun $\alpha_1 \subseteq \alpha \subseteq \mathfrak{g}$, so findet man nach [4, Satz (9)] $K(\alpha_1^\Delta \cup \alpha, \alpha) = K(\alpha_1^\Delta, \alpha_1^\Delta \cap \alpha) \leq K(\alpha_1^\Delta, \alpha_1 \cap \alpha) = K(\alpha_1^\Delta, \alpha_1) \leq \Delta$. Somit ist $\alpha_1^\Delta \cup \alpha \leq \alpha^\Delta$, insbesondere $\alpha_1^\Delta \leq \alpha^\Delta$. Aus dieser Monotonieeigenschaft folgt, wenn $\alpha, \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{g}$, jedenfalls $(\alpha \cap \mathfrak{B})^\Delta \leq \alpha^\Delta \cap \mathfrak{B}^\Delta$. Um die umgekehrte Enthaltenseinsbeziehung zu erhalten, betrachten wir $K(\alpha^\Delta \cap \mathfrak{B}^\Delta, \alpha \cap \mathfrak{B}) = K(\alpha^\Delta \cap \mathfrak{B}^\Delta, \alpha^\Delta \cap \mathfrak{B}) \cup K(\alpha^\Delta \cap \mathfrak{B}, \alpha \cap \mathfrak{B})$. Aus [4, Satz (6)] folgt, wenn man dort $\mathfrak{g}, \alpha$ und $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{B}^\Delta, \mathfrak{B}$ und $\alpha^\Delta \cap \mathfrak{B}^\Delta$ ersetzt, $K(\alpha^\Delta \cap \mathfrak{B}^\Delta, \alpha^\Delta \cap \mathfrak{B}) \leq K(\mathfrak{B}^\Delta, \mathfrak{B}) \leq \Delta$, und in entsprechender Weise $K(\alpha^\Delta \cap \mathfrak{B}, \alpha \cap \mathfrak{B}) \leq K(\alpha^\Delta, \alpha) \leq \Delta$. Damit ist $K(\alpha^\Delta \cap \mathfrak{B}^\Delta, \alpha \cap \mathfrak{B}) \leq \Delta$, also $\alpha^\Delta \cap \mathfrak{B}^\Delta \leq (\alpha \cap \mathfrak{B})^\Delta$, was noch zu zeigen war.

Anmerkung. Die Abbildungen $\alpha \to \alpha^\Delta$ und $\alpha \to \alpha_\Delta$ sind im allgemeinen keine Verbandshomomorphismen. Für $\alpha \to \alpha^\Delta$ zeigt dies folgendes einfache Beispiel: $\mathfrak{S}_4$ sei die symmetrische Permutationsgruppe von vier Ziffern. Diese hat bekanntlich nur die drei Kompositionsreihen $E \subset \mathfrak{Z}_i \subset \mathfrak{D}_4 \subset \mathfrak{A}_4 \subset \mathfrak{S}_4$, wobei $\mathfrak{D}_4$ die Kleinsche Vierergruppe ist und $\mathfrak{Z}_1 = \langle (12)(34) \rangle$, $\mathfrak{Z}_2 = \langle (13)(24) \rangle$, $\mathfrak{Z}_3 = \langle (14)(23) \rangle$. Daher ist, wenn Δ nur aus der einfachen Gruppe der Ordnung 3 besteht, $\mathfrak{Z}_i^\Delta = \mathfrak{Z}_i$ für i = 1, 2, 3, und damit $\mathfrak{Z}_1^\Delta \cup \mathfrak{Z}_2^\Delta = \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{D}_4 < \mathfrak{D}_4^\Delta = \mathfrak{A}_4 = (\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2)^\Delta$.
Ein entsprechendes Beispiel für die Abbildung $\alpha \to \alpha_\Delta$ wird in 1.12 angegeben (Zusatz).

Wir beweisen jetzt einige Formeln.

1.3 Es seien $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ paarweise fremde Teilmengen von $I = K(\mathfrak{g}, E)$.
a) Für beliebige subnormale Untergruppen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von $\mathfrak{g}$ gilt

(I) $\vartheta = \bigcap_{j=1}^n (\alpha_{j\Delta_j} \cup \bigcup_{i \neq j} \alpha_i) = \bigcup_{i=1}^n \alpha_{i\Delta_i}$

(II) $\mathfrak{w} = \bigcup_{j=1}^n (\alpha_j^{\Delta_j} \cap \bigcap_{i \neq j} \alpha_i) = \bigcap_{i=1}^n \alpha_i^{\Delta_i}$

b) Es sei $\mathcal{U}$ eine transitive Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ auf den Ziffern 1, 2, ... n. Dann gilt für jedes $\alpha \circ\!\!-\!\!\circ \mathfrak{O}$:

(III) $\bigcap_{i=1}^{n} \alpha_{\Delta_i} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{U}} \alpha_{\Delta\alpha(1) \cdots \Delta\alpha(n)}$

(IV) $\bigcup_{i=1}^{n} \alpha^{\Delta_i} = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{U}} \alpha^{\Delta\alpha(1) \cdots \Delta\alpha(n)}$

Hierbei ist $\alpha_{\Delta\alpha(1) \cdots \Delta\alpha(i-1)\Delta\alpha(i)} = (\alpha_{\Delta\alpha(1) \cdots \Delta\alpha(i-1)})_{\Delta\alpha(i)}$ und entsprechend ist $\alpha^{\Delta\alpha(1) \cdots \Delta\alpha(i)}$ definiert.

Beweis. a) Wegen der Dualität von (I) und (II) genügt es, etwa (II) zu beweisen. Offenbar ist für alle j: $\alpha_j^{\Delta_j} \cap \bigcap_{i \neq j} \alpha_i \leq \bigcap_{i=1}^{n} \alpha_i^{\Delta_i}$, somit ist $\mathfrak{V}$ eine Untergruppe der rechts stehenden Gruppe. Setzen wir zur Abkürzung $\tilde{\Delta}_j = \bigcup_{i \neq j} \Delta_i$, so ist $(\alpha_j^{\Delta_j} \cap \bigcap_{i \neq j} \alpha_i)^{\tilde{\Delta}_j} = \alpha_j^{\Delta_j \tilde{\Delta}_j} \cap \bigcap_{i \neq j} \alpha_i^{\tilde{\Delta}_j} \geq \bigcap_{i=1}^{n} \alpha_i^{\Delta_i}$, woraus für alle j folgt $K(\bigcap_{i=1}^{n} \alpha_i^{\Delta_i}, \alpha_j^{\Delta_j} \cap \bigcap_{i \neq j} \alpha_i) \leq \tilde{\Delta}_j$. Dies besagt aber $K(\bigcap_{i=1}^{n} \alpha_i^{\Delta_i}, \mathfrak{V}) \leq \bigcap_{j=1}^{n} \tilde{\Delta}_j = \bigcap_{j=1}^{n} (\bigcup_{i \neq j} \Delta_i) = \phi$, also $\mathfrak{V} = \bigcap_{i=1}^{n} \alpha_i^{\Delta_i}$.

b) Wir beweisen die Formel (III). Für eine beliebige Ziffer i, $1 \leq i \leq n$, und ein beliebiges $\alpha \in \mathcal{U}$ folgt mit $i = \alpha(j)$ aus $\alpha_{\Delta\alpha(1) \cdots \Delta\alpha(j-1)} \leq \alpha$ (es wird $\Delta_{\alpha(0)} = \phi$ gesetzt) auch $\alpha_{\Delta\alpha(1) \cdots \Delta\alpha(j-1)\Delta\alpha(j)} \leq \alpha_{\Delta\alpha(j)} = \alpha_{\Delta_i}$ und dann erst recht $\alpha_{\Delta\alpha(1) \cdots \Delta\alpha(n)} \leq \alpha_{\Delta_i}$. Dies ergibt $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{U}} \alpha_{\Delta\alpha(1) \cdots \Delta\alpha(n)} \leq \bigcap_{i=1}^{n} \alpha_{\Delta_i}$. Da $\mathcal{U}$ transitiv ist, gibt es für jedes j = 1, ..., n ein $\alpha_j \in \mathcal{U}$ mit $\alpha_j(1) = j$ und es ist $K(\alpha_{\Delta_j}, \alpha_{\Delta\alpha_j(1) \cdots \Delta\alpha_j(n)}) \leq \bigcup_{i \neq j} \Delta_i$. Die Behauptung ergibt sich nun in der Form $K(\bigcap_{i=1}^{n} \alpha_{\Delta_i}, \bigcup_{\alpha \in \mathcal{U}} \alpha_{\Delta\alpha(1) \cdots \Delta\alpha(n)}) \leq \bigcap_{j=1}^{n} (\bigcup_{i \neq j} \Delta_i) = \phi$.

Eine einfache Folge von 1.3 (III) ist der Satz (2.7) in [6]. Aus der Formel 1.3 (IV) folgt entsprechend

1.4 Es seien $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ paarweise fremde Weilmengen von I. Für jedes $\alpha \circ\!\!-\!\!\circ \mathfrak{O}$ werde $\alpha^{\delta} = \bigcap_{i=1}^{n} \alpha^{\Delta_i}$ gesetzt. Dann gilt für je zwei subnormale Untergruppen $\alpha, \mathfrak{B} \circ\!\!-\!\!\circ \mathfrak{O}$: $(\alpha \cap \mathfrak{B})^{\delta} = \alpha^{\delta} \cap \mathfrak{B}^{\delta}$.

Zum Beweis braucht man in 1.3 (IV) für α nur $\alpha \cap \mathfrak{B}$ einzusetzen und 1.2 anzuwenden.

Recht häufig werden wir den folgenden einfachen Hilfssatz anwenden.

1.5 Es sei $\mathfrak{A},\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{G}$, $K(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B},\mathfrak{A}) \subseteq \Lambda$, $K(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B},\mathfrak{B}) \subseteq \Delta$ und $\Lambda \cap \Delta = \emptyset$. Dann ist $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ vertauschbar.

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{H}_\Lambda \subseteq \mathfrak{A}$ und wegen $\mathfrak{H}_\Lambda \trianglelefteq \mathfrak{H}$ ist $\mathfrak{H}_\Lambda \cup \mathfrak{B} = \mathfrak{H}_\Lambda\mathfrak{B}$. Ferner sieht man leicht, daß $K(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_\Lambda\mathfrak{B}) \subseteq \Lambda \cap \Delta = \emptyset$ gilt, also ist $\mathfrak{H}_\Lambda\mathfrak{B} = \mathfrak{H} = \mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{A}$ trivialerweise mit $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ vertauschbar ist und $\mathfrak{H}_\Lambda \subseteq \mathfrak{A}$, folgt hieraus $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{H}_\Lambda\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Ein wesentliches Hilfsmittel für viele Untersuchungen ist der folgende Satz von Wielandt [6, Satz (3.10) b) und (3.11)]:

1.6 Es sei $\mathfrak{A},\mathfrak{B} \subseteq\subseteq \mathfrak{G}$, $\Delta,\Lambda \subseteq \Gamma$. Dann gilt:

a) Aus $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ folgt $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}_\Delta$.

b) Aus $\mathfrak{A}_\Lambda \vee \mathfrak{B}_\Delta$ folgt $\mathfrak{A}_\Delta \vee \mathfrak{B}_\Lambda$.

Mit Hilfe von 1.6 b) läßt sich auch der Satz [6, Satz (1.4)] rasch beweisen, den Wielandt als Spezialfall eines allgemeineren Satzes gewann. Wir werden ihn hier so oft anwenden, daß wir einen kurzen Beweis angeben wollen, der zudem spätere Verallgemeinerungen gestattet.

1.7 Zwei subnormale Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ sind immer dann vertauschbar, wenn es keine Primzahl gibt, die sowohl als Index eines Normalteilers der einen wie als Index eines Normalteilers der anderen Gruppe auftritt.

Beweis. Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei subnormale Untergruppen von $\mathfrak{G}$, welche die Voraussetzungen erfüllen. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach $j(\mathfrak{A}, E)$. Ist $\mathfrak{A} = E$, so ist die Behauptung trivial. Es sei also $\mathfrak{A} > E$. Enthält Λ genau die abelschen Gruppen von I, so gibt es nach Voraussetzung eine Zerlegung $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ derart, daß $\mathfrak{A}_{\Lambda_2} = \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}_{\Lambda_1} = \mathfrak{B}$ ist. Gilt $\mathfrak{A}_{\Lambda_1} = \mathfrak{A}$, so folgt $\mathfrak{A}_{\Lambda_1\cup\Lambda_2} = \mathfrak{A}$, also ist $\mathfrak{A}$ perfekt und $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ nach [4, Satz (23)]. Sonst ist $\mathfrak{A}_{\Lambda_1} < \mathfrak{A}$ und $j(\mathfrak{A}_{\Lambda_1}, E) < j(\mathfrak{A}, E)$; außerdem

erfüllen $\mathfrak{A}_{\Lambda_1}$ und $\mathfrak{B}_{\Lambda_2}$ die Voraussetzungen des Satzes. Nach Induktionsannahme ist somit $\mathfrak{A}_{\Lambda_1} \vee \mathfrak{B}_{\Lambda_2}$. Aus 1.6 b) folgt hieraus $\mathfrak{A}_{\Lambda_2} \vee \mathfrak{B}_{\Lambda_1}$, also $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$.

Wir führen nun einige Bezeichnungen ein:

1.8 Definition. Es sei $\mathfrak{A} \trianglelefteq \mathfrak{G}$. $\mathfrak{A}$ heißt einköpfig, wenn $\mathfrak{A}$ nur einen maximalen Normalteiler enthält. $\mathfrak{A}$ heißt einhütig, wenn $\mathfrak{A}$ nur in einer subnormalen Untergruppe von $\mathfrak{G}$ als maximaler Normalteiler enthalten ist. Ist $\Delta \subseteq \mathfrak{I}$, so sagen wir, $\mathfrak{A}$ besitzt einen Δ-Kopf bzw. Δ-Hut, wenn $\mathfrak{A}_\Delta < \mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}^\Delta > \mathfrak{A}$ ist. Und allgemeiner sagen wir, $\mathfrak{A}$ besitzt über $\mathfrak{B} \trianglelefteq \mathfrak{A}$ einen Δ-Kopf, wenn es ein $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{B} \trianglelefteq \mathfrak{M} \trianglelefteq \mathfrak{A}$ gibt, so daß $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}$ isomorph zu einer Gruppe aus Δ ist (kurz: $\mathfrak{A}/\mathfrak{M} \in \Delta$). Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{A}_\Delta \mathfrak{B} < \mathfrak{A}$ ist. Entsprechend besitzt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{L} \trianglerighteq \mathfrak{A}$ einen Δ-Hut, wenn $\mathfrak{A}^\Delta \cap \mathfrak{L} > \mathfrak{A}$ ist.

1.9 Es sei $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \trianglelefteq \mathfrak{G}$, $\Delta \subseteq \mathfrak{I}$.

a) Genau dann besitzt $\mathfrak{X}$ über $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ einen Δ-Kopf, wenn $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$ über $\mathfrak{Y}$ einen Δ-Kopf besitzt.

b) Besitzt $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ in $\mathfrak{X}$ einen Δ-Hut, dann besitzt auch $\mathfrak{Y}$ in $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$ einen Δ-Hut.

c) Es sei $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ besitze in $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$ einen Δ-Hut, dann besitzt auch $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ in $\mathfrak{X}$ einen Δ-Hut.

Beweis. a) (1) Wir nehmen an, $\mathfrak{X}$ besitzt über $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ keinen Δ-Kopf und zeigen, daß dann auch $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$ über $\mathfrak{Y}$ keinen Δ-Kopf besitzt, das heißt, daß $(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y})_\Delta \cup \mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_\Delta \cup \mathfrak{Y}_\Delta \cup \mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_\Delta \cup \mathfrak{Y}$ mit $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$ übereinstimmt. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{X}_\Delta \cup (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}$, andererseits gilt $\mathfrak{X}_\Delta \cup (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}) \subseteq \mathfrak{X} \cap (\mathfrak{X}_\Delta \cup \mathfrak{Y})$, also ist $\mathfrak{X} = \mathfrak{X} \cap (\mathfrak{X}_\Delta \cup \mathfrak{Y})$ und $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}_\Delta \cup \mathfrak{Y}$, somit $\mathfrak{X}_\Delta \cup \mathfrak{Y} = \mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$.
(2) Nun besitze $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$ über $\mathfrak{Y}$ keinen Δ-Kopf, es sei also $(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y})_\Delta \cup \mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_\Delta \cup \mathfrak{Y} = \mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$. Dann ist nach 1.1 offenbar $K(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}, \mathfrak{X}_\Delta \cup \mathfrak{Y}_{\bar\Delta}) = K(\mathfrak{X}_\Delta \cup \mathfrak{Y}, \mathfrak{X}_\Delta \cup \mathfrak{Y}_{\bar\Delta}) \subseteq \bar\Delta$ und $K(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}_{\bar\Delta}, \mathfrak{X}_\Delta \cup \mathfrak{Y}_{\bar\Delta}) \subseteq \Delta$, folglich $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}_{\bar\Delta} = \mathfrak{X}_\Delta \cup \mathfrak{Y}_{\bar\Delta}$. Da nach 1.7 $\mathfrak{X}_\Delta$ mit $\mathfrak{Y}_{\bar\Delta}$ vertauschbar ist, gilt gemäß

[1, S. 124] weiter $\mathfrak{X} = \mathfrak{X} \cap (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{y}_{\bar{\Delta}}) = \mathfrak{X} \cap (\mathfrak{X}_\Delta \mathfrak{y}_{\bar{\Delta}}) = \mathfrak{X}_\Delta (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{y}_{\bar{\Delta}})$. Wegen $\mathfrak{X} \geq \mathfrak{X}_\Delta \cup (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{y}) \geq \mathfrak{X}_\Delta (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{y}_{\bar{\Delta}}) = \mathfrak{X}$ ist nun $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_\Delta \cup (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{y})$, und $\mathfrak{X}$ besitzt keinen Δ-Kopf über $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{y}$.

b) $\mathfrak{y}$ besitze in $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{y}$ keinen Δ-Hut. Dann ist $\mathfrak{y}^\Delta \cap (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{y}) = \mathfrak{y}$, und es ist zu zeigen, daß $(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{y})^\Delta \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{X}^\Delta \cap \mathfrak{y}^\Delta \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{y}^\Delta \cap \mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{y}$ übereinstimmt. Es gilt $\mathfrak{y} \leq \mathfrak{y} \cup (\mathfrak{y}^\Delta \cap \mathfrak{X}) \leq \mathfrak{y}^\Delta \cap (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{y}) = \mathfrak{y}$, also $\mathfrak{y} \cup (\mathfrak{y}^\Delta \cap \mathfrak{X}) = \mathfrak{y}$. Daraus folgt $\mathfrak{y}^\Delta \cap \mathfrak{X} \leq \mathfrak{y}$ und damit $\mathfrak{y}^\Delta \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{y} \cap \mathfrak{X}$.

c) Wenn $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{y}$ in $\mathfrak{X}$ keinen Δ-Hut besitzt, ist $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{y} = (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{y})^\Delta \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{X}^\Delta \cap \mathfrak{y}^\Delta \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{y}^\Delta$ und es folgt $\mathfrak{y}^\Delta \cap (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{y}) = \mathfrak{y}^\Delta \cap (\mathfrak{X}\mathfrak{y}) = \mathfrak{y}(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{y}^\Delta) = \mathfrak{y}(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{y}) = \mathfrak{y}$, das heißt, $\mathfrak{y}$ besitzt in $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{y}$ keinen Δ-Hut.

Anmerkung. Der Beweis a) (2) läßt sich nicht so dualisieren, daß man in c) ohne die Vertauschbarkeitsvoraussetzung $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{y}$ auskäme. Wir werden am Schluß des dritten Abschnitts an einem Beispiel sehen, daß c) ohne die Voraussetzung $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{y}$ nicht richtig ist.

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung von [4, Satz (22)].

1.10 a) Jede subnormale Untergruppe $\mathfrak{A} \neq E$ von $\mathfrak{G}$, die nur Δ-Köpfe besitzt, ist das Erzeugnis von denjenigen ihrer einköpfigen subnormalen Untergruppen, die einen Δ-Kopf besitzen.

b) Jede subnormale Untergruppe $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{G}$ von $\mathfrak{G}$, die nur Δ-Hüte besitzt, ist der Durchschnitt derjenigen, $\mathfrak{A}$ umfassenden einhütigen subnormalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$, die einen Δ-Hut besitzen.

Beweis von a). Wir wenden Induktion nach $j(\mathfrak{A}, E)$ an. Ist $j(\mathfrak{A}, E) = 1$, dann ist $\mathfrak{A}$ selbst einköpfig und die Behauptung trivial. Nun sei $j(\mathfrak{A}, E) > 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit enthält $\mathfrak{A}$ zwei verschiedene maximale Normalteiler $\mathfrak{U}, \mathfrak{V} \neq E$. Wenn $\mathfrak{U}$ nur Δ_1-Köpfe und $\mathfrak{V}$ nur Δ_2-Köpfe besitzt, dann ist nach Induktionsannahme $\mathfrak{U} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{V} = \bigcup_{i=k+1}^{n} \mathfrak{X}_i$, wobei alle $\mathfrak{X}_i$, $1 \leq i \leq n$, einköpfig sind, und $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k$ nur einen Δ_1-Kopf, $\mathfrak{X}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{X}_n$ nur einen Δ_2-Kopf besitzen. Es ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{U} \cup \mathfrak{V} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i$.

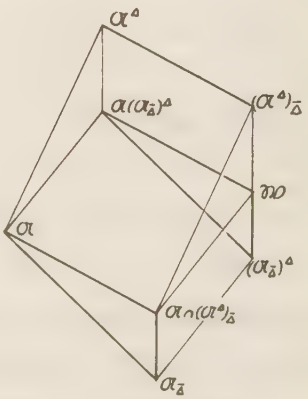
Nun besitze $\mathcal{X}_j$ keinen Δ -Kopf, und wir nehmen an, es ist $\bigcup_{i \neq j} \mathcal{X}_i = \mathcal{Y} < \mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{Y} \cup \mathcal{X}_j = \mathcal{A}$, und $\mathcal{A}$ besitzt über $\mathcal{Y}$ einen Δ -Kopf. Vermöge 1.9 a) folgt hieraus der Widerspruch, daß auch $\mathcal{X}_j$ über $\mathcal{X}_j \cap \mathcal{Y}$ einen Δ -Kopf besitzt. Somit ist $\mathcal{Y} = \mathcal{A}$. Man kann also in $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i$ alle die $\mathcal{X}_i$ der Reihe nach unterdrücken, die keinen Δ -Kopf besitzen. Damit ist a) bewiesen.

Der Beweis von b) kann analog mittels Induktion nach $j(\mathcal{O}_j, \mathcal{A})$ geführt werden. Statt 1.9 a) ist dabei 1.9 b) anzuwenden.

Auf einen interessanten Zusammenhang zwischen den Abbildungen $\mathcal{X} \to \mathcal{X}^\Delta$ und $\mathcal{X} \to \mathcal{X}_{\bar{\Delta}}$ stößt man bei der Frage, wann diese beiden Abbildungen vertauschbar sind, das heißt, wann die Gruppen $(\mathcal{X}^\Delta)_{\bar{\Delta}}$ und $(\mathcal{X}_{\bar{\Delta}})^\Delta$ übereinstimmen.

1.11 Es sei $\Delta \leq I = K(\mathcal{O}_j, E)$.

a) Für alle $\mathcal{A} \lhd\lhd \mathcal{O}_j$ gilt: $(\mathcal{A}_{\bar{\Delta}})^\Delta$ und $(\mathcal{A}^\Delta)_{\bar{\Delta}}$ haben nur Δ -Köpfe, keine Δ -Hüte, beide sind mit $\mathcal{A}$ vertauschbar, und $(\mathcal{A}_{\bar{\Delta}})^\Delta \leq (\mathcal{A}^\Delta)_{\bar{\Delta}}$. Ferner ist $(\mathcal{A}^\Delta)_{\bar{\Delta}\Delta} \cdot (\mathcal{A}_{\bar{\Delta}})^\Delta = (\mathcal{A}_{\bar{\Delta}})^{\Delta\bar{\Delta}} \cap (\mathcal{A}^\Delta)_{\bar{\Delta}} = \mathfrak{M}$, also gibt es eine Kompositionsreihe von $(\mathcal{A}_{\bar{\Delta}})^\Delta$ bis $(\mathcal{A}^\Delta)_{\bar{\Delta}}$, in der alle Δ -Faktorgruppen oben liegen.



b) Genau dann stimmen für alle $\mathcal{A} \lhd\lhd \mathcal{O}_j$ die Gruppen $(\mathcal{A}_{\bar{\Delta}})^\Delta$ und $(\mathcal{A}^\Delta)_{\bar{\Delta}}$ überein, wenn $K(\mathcal{O}_j, E^\Delta) \leq \bar{\Delta}$ gilt. Ist diese Bedingung erfüllt, dann ist für alle $\mathcal{A} \lhd\lhd \mathcal{O}_j$ die Gruppe $(\mathcal{A}_{\bar{\Delta}})^\Delta = (\mathcal{A}^\Delta)_{\bar{\Delta}} = E^\Delta$.

Beweis. a) $(\mathcal{A}^\Delta)_{\bar{\Delta}}$ hat offenbar nur Δ -Köpfe, und aus der Monotonie der Abbildung $\mathcal{X} \to \mathcal{X}^\Delta$ folgt $((\mathcal{A}^\Delta)_{\bar{\Delta}})^\Delta \leq \mathcal{A}^{\Delta\Delta} = \mathcal{A}^\Delta$. Dies zeigt, daß $(\mathcal{A}^\Delta)_{\bar{\Delta}}$ keinen Δ -Hut besitzen kann. Entsprechend folgt die Behauptung für $(\mathcal{A}_{\bar{\Delta}})^\Delta$. Die Vertauschbarkeit von $\mathcal{A}$ mit $(\mathcal{A}_{\bar{\Delta}})^\Delta$ und $(\mathcal{A}^\Delta)_{\bar{\Delta}}$ ergibt sich unmittelbar aus 1.5. Weiter folgt der Reihe nach $\mathcal{A}_{\bar{\Delta}} \leq \mathcal{A}$,

$(\mathfrak{A}_{\bar\Delta})^{\Delta} \leq \mathfrak{A}^{\Delta}, (\mathfrak{A}_{\bar\Delta})^{\Delta})_{\bar\Delta} = (\mathfrak{A}_{\bar\Delta})^{\Delta\bar\Delta} \leq (\mathfrak{A}^{\Delta})_{\bar\Delta}$. Nun ergibt sich $(\mathfrak{A}^{\Delta})_{\bar\Delta} \cap (\mathfrak{A}(\mathfrak{A}_{\bar\Delta})^{\Delta}) = (\mathfrak{A}_{\bar\Delta})^{\Delta} \cdot (\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{A}^{\Delta})_{\bar\Delta})$, und diese Gruppe stimmt mit $\mathfrak{M}$ überein, da $K((\mathfrak{A}_{\bar\Delta})^{\Delta} \cdot (\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{A}^{\Delta})_{\bar\Delta}), (\mathfrak{A}_{\bar\Delta})^{\Delta})$ $= K(\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{A}^{\Delta})_{\bar\Delta}, (\mathfrak{A}_{\bar\Delta})^{\Delta} \cap \mathfrak{A}) = K(\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{A}^{\Delta})_{\bar\Delta}, \mathfrak{A}_{\bar\Delta}) \leq \bar\Delta$ und $K((\mathfrak{A}^{\Delta})_{\bar\Delta}, (\mathfrak{A}^{\Delta})_{\bar\Delta} \cap (\mathfrak{A}(\mathfrak{A}_{\bar\Delta})^{\Delta})) = K(\mathfrak{A}(\mathfrak{A}^{\Delta})_{\bar\Delta}, \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_{\bar\Delta})^{\Delta}) = K(\mathfrak{A}^{\Delta}, \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_{\bar\Delta})^{\Delta}) \leq \Delta$.

Damit sind alle Behauptungen von a) bewiesen.

b) Es sei für alle $\mathfrak{A} \circ\!\!-\!\!\circ \mathfrak{O}_{\mathfrak{f}}$: $(\mathfrak{A}_{\bar\Delta})^{\Delta} = (\mathfrak{A}^{\Delta})_{\bar\Delta}$. Wir betrachten die Gruppen $\mathfrak{M} = E^{\Delta}$ und $\mathfrak{N} = E^{\Delta\bar\Delta} = \mathfrak{M}^{\bar\Delta}$. Es ist $\mathfrak{N}_{\bar\Delta} = \mathfrak{M}$ und nach Voraussetzung $(\mathfrak{N}^{\Delta})_{\bar\Delta} = (\mathfrak{N}_{\bar\Delta})^{\Delta} = \mathfrak{M}^{\Delta} = E^{\Delta\Delta} = \mathfrak{M}$. Wegen $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{N} \leq \mathfrak{N}^{\Delta}$ folgt hieraus $K(\mathfrak{N}^{\Delta}, \mathfrak{N}) \leq \Delta \cap \bar\Delta = \phi$, also ist $\mathfrak{N}^{\Delta} = \mathfrak{N}$. Da außerdem $\mathfrak{N}^{\bar\Delta} = \mathfrak{N}$ ist, ist notwendig $\mathfrak{N} = \mathfrak{O}_{\mathfrak{f}}$ und damit $K(\mathfrak{O}_{\mathfrak{f}}, E^{\Delta}) \leq \bar\Delta$. Jetzt sei umgekehrt $K(\mathfrak{O}_{\mathfrak{f}}, E^{\Delta}) \leq \bar\Delta$ vorausgesetzt. Nach a) ist stets $(\mathfrak{A}_{\bar\Delta})^{\Delta} \leq (\mathfrak{A}^{\Delta})_{\bar\Delta}$. Aus $\mathfrak{A}E^{\Delta}/E^{\Delta} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap E^{\Delta}$ folgt ferner $\mathfrak{A}_{\bar\Delta} = \mathfrak{A} \cap E^{\Delta}$ und $(\mathfrak{A}_{\bar\Delta})^{\Delta} = \mathfrak{A}^{\Delta} \cap E^{\Delta} = E^{\Delta}$ für alle $\mathfrak{A} \circ\!\!-\!\!\circ \mathfrak{O}_{\mathfrak{f}}$. Da $(\mathfrak{A}^{\Delta})_{\bar\Delta}$ nur Δ-Köpfe besitzt, ist $(\mathfrak{A}^{\Delta})_{\bar\Delta} = (\mathfrak{A}_{\bar\Delta})^{\Delta}$.

Die Voraussetzungen der Wielandtschen Sätze [4, Satz (23)] und 1.7 können vollständig beschrieben werden durch Abbildungen $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_{\Delta}$ für geeignete Mengen $\Delta \leq I$. Nun sahen wir bisher (1.1 bis 1.4, 1.9), daß die beiden Abbildungen $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_{\Delta}$ und $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^{\Delta}$ von $s\mathfrak{O}_{\mathfrak{f}}$ in sich weitgehend duale Eigenschaften haben. Dies legt die Frage nahe, ob sich die genannten Sätze von Wielandt in der Weise dualisieren lassen, daß man in ihren Voraussetzungen die Abbildung $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_{\Delta}$ durch die Abbildung $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^{\Delta}$ ersetzen darf. Es fragt sich also, ob Sätze richtig sind wie: Jede subnormale Untergruppe, die für keine Primzahl p einen p-Hut besitzt, ist seminormal in $\mathfrak{O}_{\mathfrak{f}}$. Oder: Eine subnormale Untergruppe $\mathfrak{A}$, die nur p-Hüte besitzt, ist mit jeder subnormalen Untergruppe $\mathfrak{B}$ vertauschbar, die keinen p-Hut besitzt. Oder auch dual zu 1.6 a): Aus $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ folgt $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}^{\Delta}$.

Wir werden zunächst an einem Beispiel zeigen, daß diese Aussagen durchaus nicht allgemein gelten.

1.12 Beispiel. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien beide isomorph zur symmetrischen Permuta-

tionsgruppe von n Ziffern, $n \neq 1,2,4$. Der Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sei gekennzeichnet durch $A_i \leftrightarrow B_i$ mit $A_i \in \mathcal{A}$, $B_i \in \mathcal{B}$. Wir bilden das direkte Produkt $\mathcal{G}^* = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ und definieren eine Abbildung δ von $\mathcal{G}^*$ auf sich durch $A_i^\delta = B_i$, $B_j^\delta = A_j$, $(A_i B_j)^\delta = A_i^\delta B_j^\delta$. Da $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ elementweise vertauschbar sind, ist δ offenbar ein Automorphismus von $\mathcal{G}^*$ der Ordnung 2. Die gesuchte Gruppe $\mathcal{G}$ sei nun die zerfallende Erweiterung $\mathcal{G}^* \mathfrak{H}$ von $\mathcal{G}^*$ durch $\mathfrak{H} = \langle H \rangle$, wobei $H^2 = E$, $H^{-1} G H = G^\delta$ für $G \in \mathcal{G}^*$. Mit $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{B}_1$ bezeichnen wir die zur alternierenden Permutationsgruppe von n Ziffern isomorphen Normalteiler von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ mit dem Index 2. $\mathcal{M} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{B}_1 = \mathcal{A}_1 \mathcal{B}_1$ ist Normalteiler von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}/\mathcal{M}$ eine Gruppe der Ordnung 8, also nilpotent. Jede Untergruppe von $\mathcal{G}/\mathcal{M}$ ist somit subnormal in $\mathcal{G}/\mathcal{M}$, also $\mathcal{M}\mathfrak{H} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathcal{G}$. $\mathcal{M}\mathfrak{H}$ hat in $\mathcal{G}$ den Index 4, besitzt demnach nur 2-Hüte. Wegen $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{G}^* \trianglelefteq \mathcal{G}$ ist $\mathcal{A}$ subnormal in $\mathcal{G}$ und wir zeigen, daß $\mathcal{A}$ keinen 2-Hut besitzt. Denn sonst existiert ein $\mathcal{Z}$ mit $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{Z} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathcal{G}$ und $|\mathcal{Z} : \mathcal{A}| = 2$, und es ist $\mathcal{A}$ normal in $\mathcal{Z} \cup \mathcal{B}$. Da $\mathcal{Z} \cap \mathcal{B}$ subnormal in $\mathcal{G}$ und damit auch in $\mathcal{B}$ ist, ist $\mathcal{Z} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B}$ oder $= \mathcal{B}_1$ oder $= E$. Die ersten beiden Fälle können nicht eintreten, also $\mathcal{Z} \cap \mathcal{B} = E$. Nun ist $j(\mathcal{Z} \cup \mathcal{B}, \mathcal{Z}) \geq j(\mathcal{B}, \mathcal{B} \cap \mathcal{Z}) = j(\mathcal{B}, E) = 2$, und wegen $j(\mathcal{G}, \mathcal{Z}) = 2$ folgt hieraus $\mathcal{B} \cup \mathcal{Z} = \mathcal{G}$. Es ergibt sich also $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B} \cup \mathcal{Z} = \mathcal{G}$, im Widerspruch zu $H^{-1} \mathcal{A} H = \mathcal{B} \neq \mathcal{A}$. Somit hat $\mathcal{A}$ keinen 2-Hut. $\mathcal{M}\mathfrak{H} \cup \mathcal{A}$ enthält $\mathcal{A}$, $\mathfrak{H}$ und damit auch $H^{-1} \mathcal{A} H = \mathcal{B}$, das heißt $\mathcal{M}\mathfrak{H} \cup \mathcal{A} = \mathcal{G}$. Der Durchschnitt $\mathcal{M}\mathfrak{H} \cap \mathcal{A}$ ist eine echte Untergruppe von $\mathcal{A}$, da sonst $\mathcal{A} \leq \mathcal{M}\mathfrak{H}$ und $\mathcal{M}\mathfrak{H} = \mathcal{G}$ wäre. Wegen $\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{M}\mathfrak{H} \cap \mathcal{A}$ ist daher $\mathcal{A}_1 = \mathcal{M}\mathfrak{H} \cap \mathcal{A}$. Dies ergibt $j(\mathcal{A} \cup \mathcal{M}\mathfrak{H}, \mathcal{M}\mathfrak{H}) = j(\mathcal{G}, \mathcal{M}\mathfrak{H}) = 2 > 1 = j(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1) = j(\mathcal{A}, \mathcal{A} \cap \mathcal{M}\mathfrak{H})$. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{M}\mathfrak{H}$ sind also nicht vertauschbar [4, Satz (8)]. Dabei sahen wir, daß $\mathcal{M}\mathfrak{H}$ nur 2-Hüte, $\mathcal{A}$ nur einen 2-Kopf und keinen 2-Hut besitzt. Wenn $n > 4$ gewählt wird, hat $\mathcal{A}$ für keine Primzahl p einen p-Hut.

Zusatz. Wenn $n > 4$ ist, ist die Gruppe $\mathcal{G}$ auch ein Beispiel dafür, daß die Abbildung $\mathcal{X} \to \mathcal{X}_\Delta$ kein Endomorphismus von $s\mathcal{G}$ zu sein braucht (siehe

1.2 Anmerkung). Δ bestehe aus der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_n$. Wir behaupten: Es ist $(\mathfrak{M}\mathfrak{H})_\Delta = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Andernfalls gibt es ein $\mathfrak{N} \trianglelefteq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}\mathfrak{H}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}_n \cong \mathfrak{A}$. Es gilt $\mathfrak{M}\mathfrak{H}/\mathfrak{N} = \mathfrak{M}\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}$, und nach bekannten Sätzen über die Remakzerlegung [10, Seite 116] ist $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N} = \mathfrak{A}$, oder $= \mathfrak{S}_n$. Aus Symmetriegründen kann $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N} = \mathfrak{A}$ angenommen werden. Wie man leicht sieht, ist $\mathfrak{N} \not\leq \mathfrak{A}$, also $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{N} > \mathfrak{A}$ und $K(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{N}, \mathfrak{A}) = K(\mathfrak{N}, \mathfrak{A}\cap\mathfrak{N}) = K(\mathfrak{N}, \mathfrak{A}_n)$, das heißt, $\mathfrak{A}$ besitzt einen 2-Hut. Dies ist jedoch nicht möglich, wie wir bereits sahen. Außer $(\mathfrak{M}\mathfrak{H})_\Delta = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ gilt auch $\mathfrak{A}_\Delta = \mathfrak{A}$, und wir erhalten $(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{M}\mathfrak{H})_\Delta = \mathfrak{A}_{n\Delta} = E < \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}\cap(\mathfrak{M}\mathfrak{H}) = \mathfrak{A}_\Delta \cap (\mathfrak{M}\mathfrak{H})_\Delta$.

Trotz des negativen Ergebnisses, das im Beispiel 1.12 zutage tritt, lassen sich interessante Aussagen machen über die Äquivalenz von einigen dieser nicht allgemein gültigen Eigenschaften. Sie werden durch den nächsten Satz vorbereitet.

1.13 Es sei $\mathfrak{A} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{O}$ und $\Delta \subseteq I$ gegeben. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\mathfrak{A}_{\bar\Delta}$ ist seminormal in $\mathfrak{O}$.

b) Wenn $\mathfrak{L} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{V} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{O}$ und $K(\mathfrak{V}, \mathfrak{L}) \subseteq \Delta$, dann ist $\mathfrak{A}$ entweder mit $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{V}$ vertauschbar oder mit keiner von beiden.

c) $\mathfrak{A}$ ist vertauschbar mit allen subnormalen Untergruppen $\mathfrak{B}$, die $\mathfrak{A}_\Delta$ enthalten.

Beweis. Aus a) folgt b): Es sei $\mathfrak{L} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{V} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{O}$, $K(\mathfrak{V}, \mathfrak{L}) \subseteq \Delta$ und $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{L}$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{A}_{\bar\Delta} \vee \mathfrak{V}$. Gemäß 1.6 b) folgt hieraus $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{V}_{\bar\Delta}$, somit $\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{L} \cup \mathfrak{V}_{\bar\Delta})$, und wegen $K(\mathfrak{V}, \mathfrak{L} \cup \mathfrak{V}_{\bar\Delta}) \subseteq \Delta\cap\bar\Delta$ ist $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{V}_{\bar\Delta} = \mathfrak{V}$. - Jetzt sei umgekehrt $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{V}$. Dann gilt nach 1.6 a) auch $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{V}_\Delta$ und es ist $\mathfrak{V}_\Delta \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{L}$. Wie eben folgt jetzt auch $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{L}$.

Aus b) folgt c): Es sei $\mathfrak{A}_\Delta \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{B} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{O}$. Dann ist $\mathfrak{B}_\Delta = (\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B})_\Delta \trianglelefteq \mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$, also $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}_\Delta$. Nach b) ist nun auch $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$.

Aus c) folgt a): Wir zeigen für alle $\mathfrak{L} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{O}$ mittels Induktion nach $j(\mathfrak{L}, \mathfrak{E})$ die Vertauschbarkeit von $\mathfrak{A}_{\bar\Delta}$ mit $\mathfrak{L}$. Wenn $j(\mathfrak{L}, \mathfrak{E}) = 0$, ist die Behauptung

trivial. Nun sei $j(\mathcal{L},\mathcal{E}) \geq 1$. Nach 1.7 ist $\mathfrak{A}_{\bar{\Delta}} \vee \mathcal{L}_{\Delta}$ und $\mathfrak{A}_{\Delta} \vee \mathcal{L}_{\bar{\Delta}}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1) Es gibt ein $\mathcal{L}_1 \lhd \mathcal{L}$ mit $K(\mathcal{L},\mathcal{L}_1) \leq \bar{\Delta}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathfrak{A}_{\bar{\Delta}} \vee \mathcal{L}_1$, und mit $\mathfrak{A}_{\bar{\Delta}} \vee \mathcal{L}_{\Delta}$ ergibt dies $\mathfrak{A}_{\bar{\Delta}} \vee (\mathcal{L}_{\Delta} \cup \mathcal{L}_1)$, wobei offenbar $\mathcal{L}_{\Delta} \cup \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}$ ist.

(2) Es ist $\mathcal{L}_{\bar{\Delta}} = \mathcal{L}$, also $\mathcal{L} \vee \mathfrak{A}_{\Delta}$. Nach c) ist nun $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}_{\Delta}\mathcal{L}$ vertauschbar, woraus $\mathfrak{A} \vee \mathcal{L}$ und dann auch $\mathfrak{A}_{\bar{\Delta}} \vee \mathcal{L}$ folgt.

1.14 a) Es sei Δ eine beliebige, aber festgehaltene Teilmenge von I. Dann sind folgende Aussagen (A), (B), (C), (D) in $\mathcal{O}_{\mathfrak{J}}$ gleichwertig:

(A) Jede subnormale Untergruppe $\mathcal{X}$ von $\mathcal{O}_{\mathfrak{J}}$, die nur Δ-Köpfe und keinen Δ-Hut besitzt, ist seminormal in $\mathcal{O}_{\mathfrak{J}}$.

(B) Aus $\mathcal{X},\mathcal{Y} \lhd\lhd \mathcal{O}_{\mathfrak{J}}$ und $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$ folgt $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}^{\Delta}$.

(C) Aus $\mathcal{X},\mathcal{Y} \lhd\lhd \mathcal{O}_{\mathfrak{J}}$ und $\mathcal{X}^{\Delta} \vee \mathcal{Y}$ folgt $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}^{\Delta}$.

(D) Wenn $\mathcal{X},\mathcal{Y} \lhd\lhd \mathcal{O}_{\mathfrak{J}}$, $K(\mathcal{X}\cup\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \leq \Delta$ und $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{X}\cup\mathcal{Y}$ keinen Δ-Hut besitzt, dann ist $\mathcal{X}$ mit $\mathcal{Y}$ vertauschbar.

b) Äquivalent sind folgende Aussagen:

α) In $\mathcal{O}_{\mathfrak{J}}$ ist die Aussage (A) für alle $\Delta \leq I$ richtig.

β) Zwei subnormale Untergruppen $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ von $\mathcal{O}_{\mathfrak{J}}$ sind immer dann vertauschbar, wenn es keine Primzahl p gibt, so daß sowohl $\mathcal{X}$ als auch $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{X}\cup\mathcal{Y}$ einen p-Hut besitzt.

γ) Zwei subnormale Untergruppen $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ von $\mathcal{O}_{\mathfrak{J}}$ sind immer dann vertauschbar, wenn es keine Primzahl p gibt, so daß $\mathcal{X}$ einen p-Kopf und $\mathcal{Y}$ einen p-Hut besitzt.

Beweis. a) Aus (A) folgt (B): Es sei $\mathcal{X},\mathcal{Y} \lhd\lhd \mathcal{O}_{\mathfrak{J}}$ und $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$. Nach 1.11 a) hat $(\mathcal{Y}^{\Delta})_{\bar{\Delta}}$ nur Δ-Köpfe und keinen Δ-Hut in $\mathcal{O}_{\mathfrak{J}}$, ist also nach (A) seminormal. Weiter gilt $(\mathcal{Y}^{\Delta})_{\Delta} = \mathcal{Y}_{\Delta} \leq \mathcal{X}\mathcal{Y}$. Nach 1.13 a)$\Rightarrow$c) ist daher $\mathcal{Y}^{\Delta}$ vertauschbar mit $\mathcal{X}\mathcal{Y}$, und dies liefert $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}^{\Delta}$.

Aus (B) folgt (C): Aus $\mathcal{X}^{\Delta} \vee \mathcal{Y}$ folgt nach (B) und 1.6 a): $\mathcal{X}^{\Delta} \vee \mathcal{Y}^{\Delta}$ und $(\mathcal{X}^{\Delta})_{\Delta} \vee \mathcal{Y}^{\Delta}$, $\mathcal{X}_{\Delta} \vee \mathcal{Y}^{\Delta}$. 1.7 liefert ferner $\mathcal{X}_{\bar{\Delta}} \vee \mathcal{Y}_{\Delta}$ und mit (B) ergibt

sich wiederum $\mathfrak{X}_{\bar{\Delta}} \vee \mathfrak{Y}^{\Delta}$. Damit gilt $\mathfrak{Y}^{\Delta} \vee (\mathfrak{X}_{\Delta} \cup \mathfrak{X}_{\bar{\Delta}})$, also $\mathfrak{Y}^{\Delta} \vee \mathfrak{X}$.

Aus (C) folgt (D): Es sei $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \subset \mathfrak{G}$, $K(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}, \mathfrak{X}) \leq \Delta$ und $\mathfrak{Y}$ besitze in $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$ keinen Δ-Hut. Dann ist $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y} \leq \mathfrak{X}^{\Delta}$, also $\mathfrak{X}^{\Delta} \vee \mathfrak{Y}$, und nach (C) gilt daher $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}^{\Delta}$. Weil $\mathfrak{Y}$ in $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$ keinen Δ-Hut besitzt, ist $(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{Y}^{\Delta} = \mathfrak{Y}$ und damit $(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}) \cap (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}^{\Delta}) = \mathfrak{X}((\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{Y}^{\Delta}) = \mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}\mathfrak{X}$.

Aus (D) folgt (A): Es sei $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{G}$, $\mathfrak{X}_{\bar{\Delta}} = \mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{\Delta}$. Nach (D) ist $\mathfrak{X}$ vertauschbar mit allen $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{G}$ der Eigenschaft $K(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}) \leq \Delta$, das heißt, mit allen $\mathfrak{Y}$, die $\mathfrak{X}_{\Delta}$ enthalten. Damit ist nach 1.13 c) $\Rightarrow$ a) $\mathfrak{X}_{\bar{\Delta}} = \mathfrak{X}$ seminormal.

b) Aus $\alpha)$ folgt $\beta)$: Voraussetzungsgemäß gibt es Mengen $\Lambda, \Delta \subseteq I$, so daß $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$ nur Λ-Hüte, $\mathfrak{Y}$ in $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$ nur Δ-Hüte besitzt und $\Lambda \cap \Delta$ nur nichtabelsche Gruppen enthält. $(\mathfrak{X}_{\Lambda})^{\bar{\Lambda}}$ ist nach 1.11 a) und $\alpha)$ seminormal in $\mathfrak{G}$. Mit $\mathfrak{X}$ besitzt auch $\mathfrak{X}_{\Lambda}$ in $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$ nur Λ-Hüte, daher ist $(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}) \cap (\mathfrak{X}_{\Lambda})^{\bar{\Lambda}} = \mathfrak{X}_{\Lambda}$. Aus $(\mathfrak{X}_{\Lambda})^{\bar{\Lambda}} \vee \mathfrak{Y}$ folgt $(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}) \cap (\mathfrak{Y}(\mathfrak{X}_{\Lambda})^{\bar{\Lambda}}) = \mathfrak{Y}((\mathfrak{X}_{\Lambda})^{\bar{\Lambda}} \cap (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}))$, also $\mathfrak{Y} \vee \mathfrak{X}_{\Lambda}$. Auf entsprechende Weise ergibt sich $\mathfrak{Y}_{\Delta} \vee \mathfrak{X}$. Nun ist $K(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}, (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y})_{\Lambda} \mathfrak{Y}_{\Delta}) \leq \Lambda \cap \Delta$. Aus 1.13 a) $\Rightarrow$ b) und der Tatsache, daß jede perfekte subnormale Untergruppe seminormal ist, folgt jetzt, daß $(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y})_{\Lambda} \mathfrak{Y}_{\Delta}$ mit $\mathfrak{X}_{\Lambda} \mathfrak{Y}$ vertauschbar ist. Wegen $(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y})_{\Lambda} \leq \mathfrak{X}_{\Lambda} \mathfrak{Y}$ ergibt sich hieraus $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}_{\Delta} \vee \mathfrak{X}_{\Lambda}\mathfrak{Y}$ und schließlich $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$.

Aus $\beta)$ folgt $\gamma)$: Nach der Voraussetzung von $\gamma)$ gibt es Mengen $\Lambda, \Delta, \Lambda \cup \Delta = I$, so daß $\mathfrak{X}$ nur Λ-Hüte und $\mathfrak{Y}$ nur Δ-Köpfe besitzt und $\Lambda \cap \Delta$ nur nichtabelsche Gruppen enthält. Gemäß $\beta)$ ist $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}^{\Lambda}$, also auch $(\mathfrak{Y}^{\Lambda})_{\Lambda} = \mathfrak{Y}_{\Lambda}$ mit $\mathfrak{X}$ vertauschbar. Nun sei $\Lambda' \cup \Delta'$ die Menge aller abelschen Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{Y}$ mit $\Lambda' \subseteq \Lambda, \Delta' \subseteq \Delta$. Dann ist $\mathfrak{Y}_{\Lambda' \cup \Delta'}$ als perfekte subnormale Untergruppe seminormal, also insbesondere $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}_{\Lambda' \cup \Delta'}$. Damit folgt $\mathfrak{X} \vee (\mathfrak{Y}_{\Lambda} \cup \mathfrak{Y}_{\Lambda' \cup \Delta'})$ und 1.1 ergibt $\mathfrak{Y}_{\Lambda} \cup \mathfrak{Y}_{\Lambda' \cup \Delta'} = \mathfrak{Y}_{\Lambda \cap (\Lambda' \cup \Delta')} = \mathfrak{Y}_{\Lambda'}$. Da $\mathfrak{Y}$ nur Δ-Köpfe besitzt, ist $\mathfrak{Y}_{\Lambda'} = \mathfrak{Y}$ und damit $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$.

Aus $\gamma)$ folgt $\alpha)$: Es sei $\Delta \subseteq I$ und $\mathfrak{X}$ eine subnormale Untergruppe, die nur Δ-Köpfe und keinen Δ-Hut besitzt. Für eine beliebige subnormale Untergruppe $\mathfrak{Y}$ von $\mathfrak{G}$ gilt nach 1.7 $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}_{\Delta}$, und aus der Voraussetzung $\gamma)$

folgt $\mathcal{X} \vee \mathcal{H}_{\bar{\Delta}}$. Damit ist $\mathcal{X}$ auch mit $\mathcal{H}_\Delta \cup \mathcal{H}_{\bar{\Delta}} = \mathcal{H}$ vertauschbar und $\mathcal{X}$ seminormal in $\mathcal{G}$.

Die im letzten Satz vorkommenden Aussagen sind in endlichen nilpotenten Gruppen alle richtig, da (A) offenbar für alle $\Delta \subseteq I$ erfüllt ist. Wir wollen jetzt schwächere Bedingungen als die Nilpotenz für ihre Gültigkeit suchen.

1.15 a) Es sei $\mathcal{A} \subset\subset \mathcal{G}$, $\mathcal{A}$ besitze nur Δ-Köpfe, keinen Δ-Hut. Dann gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ für alle $\mathcal{B} \subset\subset \mathcal{G}$ mit der Eigenschaft $K(\mathcal{B}, \mathcal{B} \cap E^\Delta) \subseteq \bar{\Delta}$.
b) Es sei $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset\subset \mathcal{G}$. $\mathcal{A}$ besitze keinen Δ-Hut, $\mathcal{B}$ besitze nur Δ-Hüte. Für die Vertauschbarkeit von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ genügt dann eine der folgenden Voraussetzungen:
$\alpha)$ $K(\mathcal{A}, \mathcal{A} \cap E^\Delta) \subseteq \bar{\Delta}$, $K(\mathcal{B}, \mathcal{B} \cap E^{\bar{\Delta}}) \subseteq \Delta$
$\beta)$ $K(\mathcal{A}, \mathcal{A} \cap E^{\bar{\Delta}}) \subseteq \Delta$, $K(\mathcal{B}, \mathcal{B} \cap E^\Delta) \subseteq \bar{\Delta}$

Beweis. a) Es ist $\mathcal{A}_{\bar{\Delta}} = \mathcal{A} = \mathcal{A}^\Delta$ und $\mathcal{B}_{\bar{\Delta}} = \mathcal{B} \cap E^\Delta$. Daraus folgt $E^\Delta \subseteq \mathcal{A}^\Delta = \mathcal{A}$ und damit $\mathcal{A} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap E^\Delta) = \mathcal{A}_{\bar{\Delta}} \cup \mathcal{B}_{\bar{\Delta}} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})_{\bar{\Delta}} \supseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$
b) Wenn wir $\alpha)$ voraussetzen, gilt: $E^{\bar{\Delta}} \subseteq \mathcal{B}^{\bar{\Delta}} = \mathcal{B}$, also $\mathcal{B}_\Delta = \mathcal{B} \cap E^{\bar{\Delta}} = E^{\bar{\Delta}} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}_\Delta \vee \mathcal{A}$. Entsprechend ist $\mathcal{A}_{\bar{\Delta}} \vee \mathcal{B}$. Nun sei $\beta)$ erfüllt. $\mathcal{A}_{\bar{\Delta}}$ hat nur $\bar{\Delta}$-Hüte, $\mathcal{B}_\Delta$ nur Δ-Hüte, also gilt nach a) $\mathcal{A}_{\bar{\Delta}} \vee \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}_\Delta$. In beiden Fällen ist nun nach 1.5 $\mathcal{A}_{\bar{\Delta}} \mathcal{B} \vee \mathcal{A} \mathcal{B}_\Delta$, woraus $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ folgt.

1.16 Es sei $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset\subset \mathcal{G}$, $\Delta \subseteq I$.
a) Ferner sei $K(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{A}) \subseteq \Delta$, $\mathcal{B}$ besitze in $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ keinen Δ-Hut. Wenn $K(\mathcal{A}, \mathcal{A} \cap E^\Delta) \subseteq \bar{\Delta}$ oder $K(\mathcal{B}, \mathcal{B} \cap E^\Delta) \subseteq \Delta$ gilt, dann ist $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.
b) Wenn $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $K(\mathcal{A}, \mathcal{A} \cap E^\Delta) \subseteq \bar{\Delta}$ und $K(\mathcal{B}, \mathcal{B} \cap E^\Delta) \subseteq \bar{\Delta}$ gilt, dann ist auch $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}^\Delta$ und $\mathcal{A}^\Delta \vee \mathcal{B}$

Beweis. a) (1) Es sei $K(\mathcal{A}, \mathcal{A} \cap E^\Delta) \subseteq \bar{\Delta}$. Da $K(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{A}) \subseteq \Delta$, ist $\mathcal{A}_\Delta = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})_\Delta \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, also sicher $\mathcal{A}_\Delta \vee \mathcal{B}$. $\mathcal{B}_{\bar{\Delta}}$ hat nur Δ-Köpfe und, wie $\mathcal{B}$ selbst, in $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ nur $\bar{\Delta}$-Hüte. Nach 1.15 a) ist daher $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}_{\bar{\Delta}}$.
(2) Nun sei $K(\mathcal{B}, \mathcal{B} \cap E^\Delta) \subseteq \bar{\Delta}$ vorausgesetzt. $\mathcal{B} \vee \mathcal{A}_\Delta$ sieht man wie in (1),

und wie im Beweis von 1.15 b) (mit Δ statt $\bar{\Delta}$) folgt auch $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}_{\bar{\Delta}}$. In beiden Fällen (1) und (2) ergibt sich jetzt nach 1.5 die Vertauschbarkeit von $\mathfrak{A}_{\Delta}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_{\bar{\Delta}}$ und hieraus $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$.

b) Es ist $K(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}^{\Delta}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}) = K(\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}^{\Delta}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}) \leq \Delta$, und $\mathfrak{B}^{\Delta}$ hat keine Δ-Hüte in $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}^{\Delta}$. Außerdem gilt $(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})_{\bar{\Delta}} = \mathfrak{A}_{\bar{\Delta}} \cup \mathfrak{B}_{\bar{\Delta}} = (\mathfrak{A} \cap E^{\Delta}) \cup \mathfrak{B} \cap E^{\Delta})$, das heißt $K(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \cap E^{\Delta}) \leq \Delta$. Nach a) ist nun $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \vee \mathfrak{B}^{\Delta}$, also $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}^{\Delta}$.

Wir haben am Beispiel 1.12 bereits gesehen, daß der Satz 'jede perfekte subnormale Untergruppe ist seminormal', sich nicht dualisieren läßt in dem dort beschriebenen Sinn. Jetzt wollen wir wenigstens ein Analogon zum Wielandtschen Satz (24) in [4] beweisen.

1.17 Es sei $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \trianglelefteq \mathfrak{O}$. $\mathfrak{A}$ besitze für keine Primzahl p einen p-Hut in $\mathfrak{O}$. Ferner sei $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ auflösbar oder normal in $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$. Dann ist $\mathfrak{A} \trianglelefteq \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$.

Beweis. Für $j(\mathfrak{O}, E) = 0$ ist nichts zu beweisen. Nun führen wir den Beweis indirekt und nehmen an, daß $\mathfrak{O}$ ein bezüglich $j(\mathfrak{O}, E)$ minimales Gegenbeispiel ist, das heißt genauer: Es ist $\mathfrak{A} \not\trianglelefteq \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ und der Satz ist richtig in allen Gruppen $\mathfrak{O}'$ mit $j(\mathfrak{O}', E) < j(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}, E)$. Wir können $\mathfrak{O} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ annehmen und behaupten: Es gibt kein $\mathfrak{N} \trianglelefteq \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ mit $E < \mathfrak{N} \trianglelefteq \mathfrak{A}$. Denn andernfalls betrachten wir $(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})/_{\mathfrak{N}} = \mathfrak{A}/_{\mathfrak{N}} \cup \mathfrak{B}\mathfrak{N}/_{\mathfrak{N}}$. Da $\mathfrak{A}/_{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{B}\mathfrak{N}/_{\mathfrak{N}} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}\mathfrak{N}/_{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})/_{\mathfrak{N}}$ ist, erfüllen $\mathfrak{A}/_{\mathfrak{N}}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{N}/_{\mathfrak{N}}$ offenbar die Voraussetzungen des Satzes. Wegen $j(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}/_{\mathfrak{N}}, E) < j(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}, E)$ ist daher $\mathfrak{A}/_{\mathfrak{N}} \trianglelefteq \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}/_{\mathfrak{N}}$, was zum Widerspruch $\mathfrak{A} \trianglelefteq \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ führt.
Aus dem eben Bewiesenen folgt: Wenn Δ die Menge der abelschen Gruppen aus $K(\mathfrak{O}, E)$ ist, so gilt $E^{\Delta} \trianglelefteq \mathfrak{A}^{\Delta} = \mathfrak{A}$, $E^{\Delta} \trianglelefteq \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, daher ist $E^{\Delta} = E$ und $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ enthält keine von E verschiedene abelsche subnormale Untergruppe. Ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ auflösbar, dann ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \trianglelefteq E^{\Delta} = E$, also $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = E$
Sonst ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \trianglelefteq \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, damit auch $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = E$. Nach [4, Satz (17)] erhalten wir nun den Widerspruch, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementweise vertauschbar sind, also $\mathfrak{A} \trianglelefteq \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ ist. Folglich gibt es kein minimales Gegenbeispiel, und der Satz ist bewiesen.

2. Die kritischen Primzahlen für $\mathfrak{Oj}$

In diesem und dem nächsten Abschnitt benötigen wir verbandstheoretische Kriterien für die Vertauschbarkeit zweier subnormaler Untergruppen. Wir wollen deshalb zunächst auf diese Fragen eingehen und beginnen mit einem einfachen Hilfssatz

2.1 Es sei $\mathfrak{A},\mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{Oj}$ und $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{M} \leq \mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$. Genau dann gilt $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{M}$ eine Darstellung $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}' \leq \mathfrak{B}$ zuläßt.

Beweis. Wenn eine solche Darstellung möglich ist, folgt die Behauptung unmittelbar. Umgekehrt sei $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{M} \leq \mathfrak{A}\cup\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Dann ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\cap(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\cap\mathfrak{M})$.

2.2 Es sei $\mathfrak{A},\mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{Oj}$. Genau dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vertauschbar, wenn $j(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) = j(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})$ ist.[1]

Beweis. Gilt $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$, so folgt die Behauptung aus [4, Satz (8)]. Nun sei umgekehrt $j(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) = j(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})$. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach $j(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$. Für $j(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) = 0$ ist die Behauptung richtig. Sonst ist $j(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) = n \geq 1$ und es gibt ein $\mathfrak{A}_1$ mit $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{A}_1 \triangleleft \mathfrak{A}\cup\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}$. Wegen $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}/\mathfrak{A}_1 \cong \mathfrak{B}/\mathfrak{A}_1\cap\mathfrak{B}$ folgt mit $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1\cap\mathfrak{B}$ aus [4, Satz (9)] und der Voraussetzung: $n - 1 = j(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}) \geq j(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}) \geq j(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}_1) = j(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}) = n-1$. Hieraus folgt $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}_1$ und $j(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}) = j(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}_1) = n-1$, somit nach Induktionsannahme $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}_1$. Es ist also $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{B}_1$ und daher $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ nach 2.1.

Eine einfache Anwendung von 2.1 ist der folgende Satz

2.3 Es sei $\mathfrak{A},\mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{Oj}$. Jedes $\mathfrak{U} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{Oj}$ mit $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B} \leq \mathfrak{U} \leq \mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ gestatte die Darstellung $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}\cap\mathfrak{A})\cup(\mathfrak{U}\cap\mathfrak{B})$. Dann ist $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}\cap\mathfrak{A})(\mathfrak{U}\cap\mathfrak{B})$.

Beweis. Wir wenden Induktion nach $j(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}\cap\mathfrak{U})$ an. Für $j(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}\cap\mathfrak{U}) = 0$ ist die Behauptung offenbar richtig. Sonst existiert ein $\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B} \leq$

[1] Wie mir Herr Professor Wielandt mitteilte, ist ihm Satz 2.2 seit

$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} \leq \mathfrak{W} \lhd \cdot \mathfrak{U}$. Es ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} \cap \mathfrak{W} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{W}$, also $j(\mathfrak{W}, \mathfrak{A} \cap \mathfrak{W}) <$ $j(\mathfrak{U}, \mathfrak{A} \cap \mathfrak{U})$. Gemäß Induktionsannahme ist jetzt $\mathfrak{W} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{W})(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{W}) =$ $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U})(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{W}) \lhd \cdot \mathfrak{U} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}) \cup (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{U})$ und 2.1 liefert sofort $\mathfrak{U} = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U})(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{U})$

Schon wiederholt wurde bisher der Satz angewandt [1, Seite 124] : Wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vertauschbare Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind, dann gilt für jede Untergruppe $\mathfrak{L} \geq \mathfrak{A}$ die Gleichung $\mathfrak{L} \cap (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{L} \cap \mathfrak{B})$. Für subnormale Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{L}$ ist auch die Umkehrung richtig. Sie ist im folgenden Satz enthalten (c)$\Rightarrow$a)).

2.4 Es sei $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$.

b) Jedes $\mathfrak{X} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{X} \leq \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ hat eine Darstellung $\mathfrak{X} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}'$ mit $\mathfrak{B}' \lhd\lhd \mathfrak{B}$.

c) Es gibt eine Kompositionsreihe $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \lhd \cdot \mathfrak{A}_1 \lhd \cdots \lhd \cdot \mathfrak{A}_r = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ bis $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, so daß jedes $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}_i$ mit $\mathfrak{B}_i \lhd\lhd \mathfrak{B}$ ist.

Beweis. Aus a) folgt b) einfach: Für $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{X} \lhd\lhd \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{X} =$ $\mathfrak{X} \cap (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A} \cup (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{B}), \mathfrak{X} \cap \mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{B}$. c) ist eine triviale Folge von b). Nun setzen wir c) voraus. Wir bemerken zuerst, daß wir uns auf den Fall $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} =$ $\mathfrak{B}_0 \leq \mathfrak{B}_1 \leq \cdots \leq \mathfrak{B}_r$ beschränken können, denn aus $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}_i$ folgt wegen $\mathfrak{B}_i \leq \mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{B}$ auch $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A} \cup (\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{B})$, so daß notfalls die $\mathfrak{B}_i$ durch die $\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{B}$ ersetzt werden können, welche die Monotonieeigenschaft erfüllen. Da $\mathfrak{A}_i < \mathfrak{A}_{i+1}$, ist auch $\mathfrak{B}_i < \mathfrak{B}_{i+1}$ für i = 0,1...,r-1. Hieraus folgt $j(\mathfrak{B}, \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) = j(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_0) \geq r = j(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}, \mathfrak{A})$. Damit ist $j(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}, \mathfrak{A}) =$ $j(\mathfrak{B}, \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ und $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ nach 2.2 vertauschbar.

Anmerkung. Es genügt nicht, in c) nur vorauszusetzen: Für einen maximalen Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{M} \lhd \cdot \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ gilt $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}' \lhd\lhd \mathfrak{B}$. Dies zeigt das folgende Beispiel:

Es sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}$ die einfache Gruppe der Ordnung q (q Primzahl),

$\mathfrak{P} = \langle A, B \rangle$ die nichtabelsche Gruppe der Ordnung p^3, deren Elemente alle die Ordnung p haben (p ungerade Primzahl). Wir setzen $\mathfrak{A} = \langle A \rangle$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{Q} \cup \langle B \rangle$, $\mathfrak{B}' = \langle B \rangle$. Dann ist $\mathfrak{A} < \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}' = \mathfrak{P} \triangleleft \mathfrak{Q} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, und alle Untergruppen von $\mathfrak{Q}$ sind subnormal, da $\mathfrak{Q}$ nilpotent ist. Es ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = E$ und daher $j(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}, \mathfrak{B}) = 2 > 1 = j(\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$, also $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}\mathfrak{A}$.

Mit dem Begriff der Modularität [10, Seite 190] folgt aus 2.4 unmittelbar der Satz

2.5 Genau dann sind je zwei subnormale Untergruppen von $\mathfrak{Q}$ vertauschbar, wenn der Verband $s\mathfrak{Q}$ modular ist.

Wir wenden uns nun der Frage zu, welcher Zusammenhang zwischen den Vertauschbarkeitseigenschaften zweier subnormaler Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ besteht, wenn $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ enthalten ist. Eine einfache Antwort erhält man in dem Fall, daß zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nur nichtabelsche Kompositionsfaktorgruppen liegen. Aus [4, Satz (23)] und 1.13 a) $\Rightarrow$ b) folgt sofort:

2.6 Es sei $\mathfrak{A} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{Q}$ und zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mögen nur nichtabelsche Kompositionsfaktorgruppen von $\mathfrak{Q}$ liegen. Dann ist $\mathfrak{B}$ mit genau denselben subnormalen Untergruppen von $\mathfrak{Q}$ vertauschbar wie $\mathfrak{A}$. Insbesondere sind entweder $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seminormal in $\mathfrak{Q}$ oder keine von beiden. [1])

Eine entsprechend weitreichende Aussage wie 2.6 ist natürlich nicht möglich, wenn zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auch abelsche Kompositionsfaktorgruppen vorkommen. Wir untersuchen zuerst den Fall, daß $\mathfrak{Q}$ endlich ist und zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nur p-Kompositionsfaktorgruppen für eine bestimmte Primzahl p auftreten. Dazu schicken wir einen Hilfssatz voraus.

2.7 $\mathfrak{Q}$ sei eine endliche Gruppe, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{A}_p$, $\mathfrak{B}_p$ seien p-Sylowgruppen von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$.

---

[1]) Auf diesen Ausgangspunkt der folgenden Untersuchung hat mich Herr Professor Wielandt aufmerksam gemacht.

a) Wenn $\mathcal{A}_p \cup \mathcal{B}_p$ eine p-Gruppe ist, dann ist $\mathcal{A}_p \cup \mathcal{B}_p$ eine p-Sylowgruppe von $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, und $\mathcal{A}_p \cap \mathcal{B}_p$ ist eine p-Sylowgruppe von $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.
b) Wenn $\mathcal{A}_p \leq \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_p \leq \mathcal{B}$ gilt, dann ist $\mathcal{A}_p \cup \mathcal{B}_p$ eine p-Sylowgruppe von $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ und $\mathcal{A}_p \cup \mathcal{B}_p \leq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Beweis. a) Als p-Gruppe ist $\mathcal{A}_p \cup \mathcal{B}_p$ enthalten in einer p-Sylowgruppe $\mathcal{P}$ von $\mathcal{O}$. Nun ist $\mathcal{A}_p \leq \mathcal{A} \cap \mathcal{P}$, $\mathcal{B}_p \leq \mathcal{B} \cap \mathcal{P}$, und daraus folgt sofort $\mathcal{A}_p = \mathcal{A} \cap \mathcal{P}$, $\mathcal{B}_p = \mathcal{B} \cap \mathcal{P}$. Nach [7, Satz (3.2) und (3.1)] ist $(\mathcal{A} \cap \mathcal{P}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{P}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{P}$ eine p-Sylowgruppe von $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ und $\mathcal{A}_p \cap \mathcal{B}_p = \mathcal{A} \cap \mathcal{P} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{P} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{P}$ eine p-Sylowgruppe von $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.
b) Da $\mathcal{A}_p$ und $\mathcal{B}_p$ subnormal in $\mathcal{O}$ sind, ist auch $\mathcal{A}_p \cup \mathcal{B}_p$ eine subnormale p-Gruppe, nach a) also eine p-Sylowgruppe von $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ und als subnormale Sylowgruppe sogar normal in $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

2.8 $\mathcal{O}$ sei endlich, $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{O}$ und $|\mathcal{B} : \mathcal{A}| = p^\alpha = k$, p Primzahl.
a) Für ein $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{O}$ sei $\mathcal{A} \vee \mathcal{L}$. Genau dann ist $\mathcal{B} \vee \mathcal{L}$, wenn $\mathcal{B}_p \vee \mathcal{L}_p$ für ein Paar $\mathcal{B}_p, \mathcal{L}_p$ von p-Sylowgruppen von $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{L}$ gilt.
b) Für ein $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{O}$ sei $\mathcal{B} \vee \mathcal{L}$. Genau dann ist $\mathcal{A} \vee \mathcal{L}$, wenn $\mathcal{A}_p \vee \mathcal{L}_p$ für ein Paar $\mathcal{A}_p, \mathcal{L}_p$ von p-Sylowgruppen von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{L}$ gilt.

Beweis. a) (1) Gilt $\mathcal{B} \vee \mathcal{L}$, dann gibt es nach [5, Satz 6] vertauschbare p-Sylowgruppen $\mathcal{B}_p, \mathcal{L}_p$ von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{L}$.
(2) Nun seien zwei p-Sylowgruppen $\mathcal{B}_p$ und $\mathcal{L}_p$ von $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{L}$ vertauschbar. $\mathcal{B}_p \mathcal{L}_p$ ist offenbar eine p-Gruppe, also nach 2.7 a) eine p-Sylowgruppe von $\mathcal{B} \cup \mathcal{L}$ und $\mathcal{B}_p \cap \mathcal{L}_p$ eine p-Sylowgruppe von $\mathcal{B} \cap \mathcal{L}$. Aus $\mathcal{A} \vee \mathcal{L}$ folgt wie in (1) die Existenz vertauschbarer p-Sylowgruppen $\mathcal{A}_p$ und $\bar{\mathcal{L}}_p$ von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$, somit ist wiederum $\mathcal{A}_p \bar{\mathcal{L}}_p$ eine p-Sylowgruppe von $\mathcal{A} \cup \mathcal{L}$ und $\mathcal{A}_p \cap \bar{\mathcal{L}}_p$ eine p-Sylowgruppe von $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$. Nun seien a, b, c, d, e, f, g in dieser Reihenfolge die Ordnungen der p-Sylowgruppen von $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{L}, \mathcal{A} \cap \mathcal{L}, \mathcal{B} \cap \mathcal{L}, \mathcal{A} \cup \mathcal{L}, \mathcal{B} \cup \mathcal{L}$. Dann folgt aus unseren Überlegungen $g = \frac{bc}{e}$, $f = \frac{ac}{d}$, $k = \frac{b}{a}$. Die Indizes $|\mathcal{B} \cup \mathcal{L} : \mathcal{A}\mathcal{L}| = m$ und $|\mathcal{B} \cap \mathcal{L} : \mathcal{A} \cap \mathcal{L}| = n$ sind wieder p-Potenzen (1.1 und 1.2). Damit erhalten wir $g = mf$, $e = nd$,

also $mn = k$. Jetzt ergibt sich $|\mathcal{B} \cup \mathcal{L} : \mathcal{L}| = m \cdot |\mathcal{A}\mathcal{L} : \mathcal{L}| = m \cdot |\mathcal{A} : \mathcal{A} \cap \mathcal{L}|$ $= \frac{m}{k} |\mathcal{B} : \mathcal{A} \cap \mathcal{L}| = \frac{m}{k} \cdot n \cdot |\mathcal{B} : \mathcal{B} \cap \mathcal{L}| = |\mathcal{B} : \mathcal{B} \cap \mathcal{L}|$, somit gilt $\mathcal{B} \vee \mathcal{L}$.

b) kann mit den nämlichen Überlegungen bewiesen werden wie a).

Wenn $\mathcal{G}$ nur eine endliche Kompositionsreihe besitzt, so kann man einen zu 2.8 wenigstens in gewissem Sinn analogen Satz beweisen (siehe 2.12). Zuvor aber führen wir zwei Begriffe ein, mit deren Hilfe sich der Satz 2.6 verallgemeinern läßt.

2.9 Definition.

(1) Ein Δ-Ausschnitt von $\mathcal{G}$ ist eine Δ-Faktorgruppe $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ zweier subnormaler Untergruppen $\mathcal{B} \trianglelefteq \mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{G}$. Insbesondere heißt $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ ein p-Ausschnitt von $\mathcal{G}$, wenn $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ eine p-Gruppe ist.

(2) Eine Primzahl p heißt eine "kritische Primzahl für $\mathcal{G}$", wenn es einen p-Ausschnitt von $\mathcal{G}$ gibt, der nicht modular ist, das heißt, dessen Untergruppenverband (= Subnormalteilerverband) nicht modular ist.

Wir wollen künftig einfach sagen, eine Primzahl p liegt in Δ, wenn die einfache Gruppe der Ordnung p in Δ enthalten ist.

2.10 a) Es sei $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B} \trianglelefteq \mathcal{G}$ und $K(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \Delta$. Keine kritische Primzahl für $\mathcal{G}$ liege in Δ. Dann ist $\mathcal{A}$ mit denselben subnormalen Untergruppen von $\mathcal{G}$ vertauschbar wie $\mathcal{B}$.

b) Wenn umgekehrt für ein $\Delta \subseteq \Gamma$ und alle $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B} \trianglelefteq \mathcal{G}$ mit $K(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \subseteq \Delta$ die Gruppen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit denselben subnormalen Untergruppen von $\mathcal{G}$ vertauschbar sind, dann besitzt jeder Δ-Ausschnitt von $\mathcal{G}$ einen modularen Subnormalteilerverband.

Beweis. a) Wir setzen für ein $\mathcal{X} \trianglelefteq \mathcal{G}$ die Vertauschbarkeit von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{X}$ voraus und zeigen mittels Induktion nach $j(\mathcal{B}, \mathcal{A})$, daß auch $\mathcal{B} \vee \mathcal{X}$ gilt. Wenn $j(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = 0$, ist nichts zu beweisen. Ist $j(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \geq 1$, so gibt es ein $\mathcal{L}$ mit $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{L} \trianglelefteq \mathcal{B}$. Offenbar erfüllen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$ die Voraussetzung des

Satzes, und wegen $j(\mathfrak{L},\mathfrak{A}) < j(\mathfrak{B},\mathfrak{A})$ ist nach Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{L} \vee \mathfrak{X}$. Wenn $\mathfrak{B}/\mathfrak{L}$ nichtabelsch ist, folgt aus 2.6 auch $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{X}$. Sonst ist $\mathfrak{B}/\mathfrak{L}$ von Primzahlordnung p, $p \in \Delta$. Mit $\Pi = \{p\}$ gilt nun $(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{X})_\Pi = \mathfrak{B}_\Pi \cup \mathfrak{X}_\Pi \leq \mathfrak{L}\mathfrak{X} \leq \mathfrak{B} \cup \mathfrak{X}$, und nach Voraussetzung ist $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{X}/(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{X})_\Pi$ modular. Nach 2.5 ist daher $\mathfrak{L}\mathfrak{X}/(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{X})_\Pi$ vertauschbar mit $\mathfrak{B}(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{X})_\Pi/(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{X})_\Pi$. Hieraus folgt $\mathfrak{X}\mathfrak{L} \vee \mathfrak{B}(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{X})_\Pi$, das heißt $\mathfrak{X}\mathfrak{L} \cup (\mathfrak{B} \cup \mathfrak{X})_\Pi \mathfrak{B} = \mathfrak{X}\mathfrak{L}(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{X})_\Pi \mathfrak{B} = \mathfrak{X}\mathfrak{L}\mathfrak{B} = \mathfrak{X}\mathfrak{B}$. Damit gilt auch $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{X}$. - Ist umgekehrt ein $\mathfrak{N} \prec\prec \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{B}$ vertauschbar, dann gilt gemäß 1.6 a) auch $\mathfrak{N} \vee \mathfrak{B}_\Delta$ und wegen $\mathfrak{B}_\Delta \prec\prec \mathfrak{A}$ folgt nach dem eben Bewiesenen $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}$.

b) Wenn $\mathfrak{X}/\mathfrak{N}$ ein Δ-Ausschnitt von $\mathfrak{G}$ ist, braucht nach 2.5 nur gezeigt zu werden: Für beliebige $\mathfrak{U}, \mathfrak{W}$ mit $\mathfrak{N} \prec\prec \mathfrak{U} \prec\prec \mathfrak{X}$, $\mathfrak{N} \prec\prec \mathfrak{W} \prec\prec \mathfrak{X}$ gilt $\mathfrak{U} \vee \mathfrak{W}$. Nun ist $K(\mathfrak{U},\mathfrak{N}) \leq \Delta$, und da $\mathfrak{N} \vee \mathfrak{W}$ gilt, ist nach Voraussetzung auch $\mathfrak{U} \vee \mathfrak{W}$.

Eine unmittelbare Folge von 2.10 ist der folgende Satz, der für endliche Gruppen von G. Zappa [9] bereits auf anderem Wege bewiesen wurde.

2.11 Genau dann ist der Verband $s\mathfrak{G}$ modular, wenn für jede Primzahl p, die als Kompositionsfaktor von $\mathfrak{G}$ auftritt, jeder p-Ausschnitt von $\mathfrak{G}$ modular ist.

Mit Hilfe von 2.10 kann nun auch der in Aussicht gestellte, zu 2.8 analoge Satz bewiesen werden, der 2.10 umfaßt.

2.12 Es sei $\mathfrak{A} \prec\prec \mathfrak{B} \prec\prec \mathfrak{G}$ und $K(\mathfrak{B},\mathfrak{A}) = \Delta$. Λ bedeute im folgenden stets eine Teilmenge von I mit der Eigenschaft, daß $\Lambda \cap \Delta$ keine kritische Primzahl für $\mathfrak{G}$ enthält.

a) Für ein $\mathfrak{L} \prec\prec \mathfrak{G}$ sei $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{L}$. Genau dann ist $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{L}$ vertauschbar, wenn es ein $\Lambda \subseteq I$ der angegebenen Art gibt, so daß $\mathfrak{B}_\Lambda$ mit $\mathfrak{L}_\Lambda$ vertauschbar ist.

b) Für ein $\mathfrak{L} \prec\prec \mathfrak{G}$ sei $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{L}$. Genau dann ist $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{L}$ vertauschbar, wenn es ein $\Lambda \subseteq I$ der angegebenen Art gibt, so daß $\mathfrak{A}_\Lambda$ mit $\mathfrak{L}_\Lambda$ vertauschbar ist.

Beweis. a) Ist $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{L}$, so braucht man nur $\Lambda = \Phi$ zu setzen. Nun gelte

für ein Λ umgekehrt $\mathcal{L}_\Lambda \vee \mathcal{L}_\Lambda$. Wenn $\Delta' = \Delta \cup \bar{\Lambda}$ ist, so haben $\mathcal{L}_\Lambda$ und $\mathcal{L}_{\Delta'}$ offenbar keinen Kopf gemeinsam und 1.7 zufolge gilt $\mathcal{L}_\Lambda \vee \mathcal{L}_{\Delta'}$. Also ist $\mathcal{L}_\Lambda$ auch mit $\mathcal{L}_\Lambda \cup \mathcal{L}_{\Delta'}$ vertauschbar. Da $K(\mathcal{L}, \mathcal{L}_\Lambda \cup \mathcal{L}_{\Delta'}) \leq \Lambda \cap \Delta' = \Lambda \cap (\Delta \cup \bar{\Lambda}) = \Lambda \cap \Delta$, folgt aus 2.10 wegen der Voraussetzung über Λ die Vertauschbarkeit von $\mathcal{L}_\Lambda$ mit $\mathcal{L}$. Mit $\mathcal{A} \vee \mathcal{L}$ gilt daher auch $(\mathcal{L}_\Lambda \cup \mathcal{A}) \vee \mathcal{L}$. Wegen $K(\mathcal{L}, \mathcal{L}_\Lambda \cup \mathcal{A}) \leq \Lambda \cap \Delta$ folgt nun wie eben aus 2.10 auch $\mathcal{L} \vee \mathcal{L}$.

b) Wird $\mathcal{A}_\Lambda \vee \mathcal{L}_\Lambda$ vorausgesetzt, so ergibt sich nach ähnlichem Vorgehen wie in a) der Reihe nach $\mathcal{A}_\Lambda \vee \mathcal{L}_{\Delta'}$, $\mathcal{A}_\Lambda \vee (\mathcal{L}_\Lambda \cup \mathcal{L}_{\Delta'})$, $\mathcal{A}_\Lambda \vee \mathcal{L}$, $\mathcal{L}_\Delta \vee \mathcal{L}$, $\mathcal{A}_\Delta \vee \mathcal{L}$, $\mathcal{L} \vee (\mathcal{A}_\Lambda \cup \mathcal{A}_\Delta)$, $\mathcal{L} \vee \mathcal{A}$.

Jetzt sollen einige Sätze von Wielandt verallgemeinert werden. Zuvor ein Hilfssatz

2.13 Es sei $\Delta_i \in I$ für i = 1,..., n, und $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \leq \mathcal{G}$. Ferner sei α eine Permutation der Ziffern 1,..., n. Dann ist $\mathcal{X}_{\Delta\alpha(1)\cdots\Delta\alpha(n)}$ vertauschbar mit $\mathcal{Y}_{\bar{\Delta}_i}$ für alle i = 1,..., n, also auch mit dem Erzeugnis $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{Y}_{\bar{\Delta}_i}$.

Beweis. Für beliebiges i mit $1 \leq i \leq n$ gibt es ein k, so daß $i = \alpha(k)$ ist. Nach 1.7 ist nun $\mathcal{X}_{\Delta\alpha(1)\cdots\Delta\alpha(k)} = \mathcal{X}_{\Delta\alpha(1)\cdots\Delta\alpha(k-1)\Delta_i}$ vertauschbar mit $\mathcal{Y}_{\bar{\Delta}_i}$ und 1.6 a) ergibt durch eine triviale Induktion die Vertauschbarkeit von $\mathcal{X}_{\Delta\alpha(1)\cdots\Delta\alpha(n)}$ mit $\mathcal{Y}_{\bar{\Delta}_i}$.

Hieraus ergibt sich der folgende Satz:

2.14 In Δ seien sämtliche kritischen Primzahlen für $\mathcal{G}$ enthalten. Dann ist für jedes $\mathcal{X} \leq \mathcal{G}$ und für jede Zerlegung $\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$ mit paarweise fremden Mengen Δ_i die Gruppe $\mathcal{X}_\delta = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{\Delta_i}$ seminormal in $\mathcal{G}$.

Beweis. Nach 2.13 ist für alle $\alpha \in \mathfrak{S}_n$ und alle $\mathcal{Y} \leq \mathcal{G}$ die Gruppe $\mathcal{X}_{\Delta\alpha(1)\cdots\Delta\alpha(n)}$ vertauschbar mit $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{Y}_{\bar{\Delta}_i}$. Dann ist $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{Y}_{\bar{\Delta}_i}$ auch vertauschbar mit dem Erzeugnis $\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{X}_{\Delta\alpha(1)\cdots\Delta\alpha(n)}$, und dies ist nach 1.3 b) (III) gleich dem Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{\Delta_i} = \mathcal{X}_\delta$. Wir haben ferner $K(\mathcal{Y}, \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{Y}_{\bar{\Delta}_i}) \leq \bigcap_{i=1}^{n} \bar{\Delta}_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i} = \bar{\Delta}$, und $\bar{\Delta}$ enthält keine kritische Primzahl für $\mathcal{G}$. Gemäß 2.10 gilt somit auch $\mathcal{Y} \vee \mathcal{X}_\delta$.

Ist speziell $\Delta = \{p_1, \ldots, p_m\}$ genau die Menge aller kritischen Primzahlen für $\mathcal{G}$ und $\pi_i = \{p_i\}$, so sieht man leicht, daß bei festgehaltenem $\mathfrak{X} \circ\!\!-\!\!\circ \mathcal{G}$ für alle in 2.14 angegebenen Zerlegungen $\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$ die Beziehung $\mathfrak{X}_\Delta \leq \mathfrak{X}_\delta = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_{\Delta_i} \leq \bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{X}_{\pi_i}$ gilt. Besonders interessant sind die beiden Grenzfälle der Zerlegung von Δ:

(1) Die feinste Zerlegung $\Delta = \bigcup_{i=1}^{m} \pi_i$. Die Behauptung von 2.14 ist jetzt eine Verallgemeinerung des Wielandtschen Satzes [6, Satz 1.5], der besagt, daß zu jedem $\mathfrak{X} \circ\!\!-\!\!\circ \mathcal{G}$ der minimale Normalteiler $\mathfrak{X}_n$ von $\mathfrak{X}$ mit nilpotenter Faktorgruppe $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_n$ seminormal in $\mathcal{G}$ ist.

(2) Die triviale Zerlegung $\Delta = \Delta \cup \emptyset$. Dann ist $\mathfrak{X}_\delta = \mathfrak{X}_\Delta$ und 2.14 lautet in diesem Spezialfall:

2.15 Δ enthalte alle kritischen Primzahlen für $\mathcal{G}$. Dann ist jede subnormale Untergruppe, die keinen Δ-Kopf besitzt, seminormal in $\mathcal{G}$.

Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung des Satzes von Wielandt [4, Satz (23)] dar, daß jede perfekte subnormale Untergruppe seminormal ist. Auch die Umkehrung von 2.15 ist richtig; allgemeiner gilt:

2.16 Es sei $\Delta \subseteq \mathbb{I}$. Für jedes $\mathfrak{X} \circ\!\!-\!\!\circ \mathcal{G}$ gebe es eine in $\mathcal{G}$ seminormale Untergruppe $\mathfrak{X}_\delta$ zwischen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_\Delta$. Dann besitzt jeder $\bar{\Delta}$-Ausschnitt von $\mathcal{G}$ einen modularen Subnormalteilerverband.

Beweis. Mit $\mathfrak{X}_\delta$ ist auch $(\mathfrak{X}_\delta)_\Delta = \mathfrak{X}_\Delta$ seminormal in $\mathcal{G}$. Dies ergibt zusammen mit 1.13 a)$\Rightarrow$b) und 2.10 b) sofort die Behauptung.

Anmerkung. Mit 2.10 a) und 2.15 läßt sich nun auch 1.14 b) dahingehend verallgemeinern, daß in β) und γ) überall das Wort "Primzahl" durch "kritische Primzahl für $\mathcal{G}$" ersetzt werden darf.

Wielandts Satz 1.7 kann mit Hilfe von 2.15 ebenfalls allgemeiner gefaßt werden.

2.17 a) Zwei subnormale Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von $\mathcal{G}$ sind immer dann

vertauschbar, wenn es keine kritische Primzahl p für $\mathcal{G}$ gibt, so daß sowohl $\mathcal{A}$ wie $\mathcal{B}$ einen p-Kopf besitzt .

b) Es sei $\mathcal{X} \subset\subset \mathcal{A} \subset\subset \mathcal{G}$, $\mathcal{Y} \subset\subset \mathcal{B} \subset\subset \mathcal{G}$, und es gebe keine kritische Primzahl p für $\mathcal{G}$, so daß sowohl $\mathcal{A}$ über $\mathcal{X}$ als auch $\mathcal{B}$ über $\mathcal{Y}$ einen p-Kopf besitzt. Ferner sei $\mathcal{X} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{Y} \vee \mathcal{A}$. Dann sind auch $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ vertauschbar.

c) Es sei $\Delta \subseteq I$ und zwei subnormale Untergruppen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ von $\mathcal{G}$ seien immer dann vertauschbar, wenn jede einfache Gruppe, die als Kopf sowohl von $\mathcal{A}$ wie auch von $\mathcal{B}$ auftritt, in Δ enthalten ist. Dann besitzt jeder Δ-Ausschnitt von $\mathcal{G}$ einen modularen Subnormalteilerverband.

Beweis. a) kann in analoger Weise bewiesen werden wie 1.7. Anstelle der Zerlegung $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ ist hier eine Zerlegung der Menge Δ aller kritischen Primzahlen für $\mathcal{G}$ in fremde Teilmengen Δ_1 und Δ_2 möglich, so daß $\mathcal{A}$ keine Δ_2-Köpfe und $\mathcal{B}$ keine Δ_1-Köpfe besitzt. Statt Satz (23) in [4] ist dann der Satz 2.15 anzuwenden.

b) Die Voraussetzung gestattet eine Zerlegung der Menge I in zwei Mengen Λ und Δ, so daß ihr Durchschnitt keine kritischen Primzahlen für $\mathcal{G}$ enthält, und $\mathcal{A}$ über $\mathcal{X}$ nur Λ-Köpfe, $\mathcal{B}$ über $\mathcal{Y}$ nur Δ-Köpfe aufweist. Somit ist $\mathcal{A}_{\bar{\Lambda}} \cup \mathcal{X} = \mathcal{A}_{\bar{\Lambda}} \mathcal{X} = \mathcal{A}$ und $\mathcal{B}_{\bar{\Delta}} \mathcal{Y} = \mathcal{B}$. Daraus folgt weiter $(\mathcal{B}\mathcal{X})_{\bar{\Delta}} (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) = (\mathcal{B} \cup \mathcal{X})_{\bar{\Delta}} \cup (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) = \mathcal{B}_{\bar{\Delta}} \cup \mathcal{X}_{\bar{\Delta}} \cup \mathcal{X} \cup \mathcal{Y} = \mathcal{X} \cup (\mathcal{B}_{\bar{\Delta}} \cup \mathcal{Y}) = \mathcal{X} \cup \mathcal{B} = \mathcal{X}\mathcal{B}$ und entsprechend $(\mathcal{A}\mathcal{Y})_{\bar{\Lambda}} (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) = \mathcal{A}\mathcal{Y}$. Nach a) ist $(\mathcal{A}\mathcal{Y})_{\bar{\Lambda}}$ vertauschbar mit $(\mathcal{B}\mathcal{X})_{\bar{\Delta}}$, und daraus folgt auch $\mathcal{A}\mathcal{Y} \vee \mathcal{B}\mathcal{X}$. Nun ergibt sich $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{A}\mathcal{Y} \cdot \mathcal{B}\mathcal{X} = \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{X} = \mathcal{A}\mathcal{X}\mathcal{B} = \mathcal{A}\mathcal{B}$, also $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

Die Behauptung c) wird auf Satz 2.16 zurückgeführt durch die Feststellung, daß unter der Voraussetzung von c) offenbar für jedes $\mathcal{X} \subset\subset \mathcal{G}$ die Gruppe $\mathcal{X}_{\bar{\Delta}}$ seminormal ist.

Mit Hilfe von 2.14, 2.16 und 2.17 ergibt sich leicht folgende Äquivalenz.

2.18 Es sei $\Delta \subseteq I$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

a) Für jedes $\mathcal{X} \subset\subset \mathcal{G}$ und jede Zerlegung $\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$ von Δ in paarweise

fremde Mengen ist die Gruppe $\mathfrak{X}_\delta = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_{\Delta_i}$ seminormal in $\mathfrak{G}$.

b) Für eine bestimmte Zerlegung $\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$ von Δ in paarweise fremde Teilmengen ist für jedes $\mathfrak{X} \subset\subset \mathfrak{G}$ die Gruppe $\mathfrak{X}_\delta = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_{\Delta_i}$ seminormal in $\mathfrak{G}$.

c) Zwei subnormale Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ sind immer dann vertauschbar, wenn jede einfache Gruppe, die als Kopf sowohl von $\mathfrak{A}$ als auch von $\mathfrak{B}$ auftritt, in $\bar{\Delta}$ enthalten ist.

Der folgende Satz greift eine mit 2.17 b) zusammenhängende Frage auf.

2.19 Es sei $\mathfrak{X} \subset\subset \mathfrak{A} \subset\subset \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Y} \subset\subset \mathfrak{B} \subset\subset \mathfrak{G}$.

a) Es gebe keine kritische Primzahl p für $\mathfrak{G}$, so daß sowohl zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{X}$ als auch zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{Y}$ eine p-Kompositionsfaktorgruppe auftritt. Dann folgt aus $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{Y}, \mathfrak{B} \vee \mathfrak{X}$ auch $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$ und umgekehrt.

b) Es gebe keine einfache Gruppe, die als Kopf sowohl von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{X}$ als auch von $\mathfrak{B}$ über $\mathfrak{Y}$ auftritt. Ferner sei $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$. Dann folgt aus $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{Y}, \mathfrak{B} \vee \mathfrak{X}$ auch $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$ und umgekehrt.

Beweis. a) Es sei $K(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}) \leq \Lambda$ und $K(\mathfrak{B}, \mathfrak{Y}) \leq \Delta$, wobei Λ, Δ nach Voraussetzung so gewählt werden können, daß $\Lambda \cap \Delta$ keine kritischen Primzahlen für $\mathfrak{G}$ enthält. Wir setzen $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{Y}, \mathfrak{B} \vee \mathfrak{X}$ voraus. Nach 2.17 b) gilt dann $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, also braucht nur noch $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$ nachgewiesen zu werden. Es ist nun $\mathfrak{A}_\Lambda \subset\subset \mathfrak{X}$, $\mathfrak{B}_\Delta \subset\subset \mathfrak{Y}$, und $K(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}_\Lambda) \leq \Lambda$, $K(\mathfrak{Y}, \mathfrak{B}_\Delta) \leq \Delta$, außerdem folgt aus $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{Y}, \mathfrak{B} \vee \mathfrak{X}$ auch $\mathfrak{A}_\Lambda \vee \mathfrak{Y}, \mathfrak{B}_\Delta \vee \mathfrak{X}$. Für die subnormalen Untergruppen $\mathfrak{A}_\Lambda \subset\subset \mathfrak{X} \subset\subset \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{B}_\Delta \subset\subset \mathfrak{Y} \subset\subset \mathfrak{G}$ sind damit die Voraussetzungen von 2.17 b) erfüllt, folglich gilt $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$. - Jetzt sei umgekehrt $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$ vorausgesetzt. Wegen $\mathfrak{B}_\Delta \leq \mathfrak{Y}$ folgt mit Hilfe von 1.6 a) $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})_\Delta \mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \mathfrak{A}_\Delta \mathfrak{B}_\Delta \mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \mathfrak{A}_\Delta \mathfrak{B}_\Delta \mathfrak{Y}\mathfrak{X} = \mathfrak{A}_\Delta \mathfrak{Y}\mathfrak{X} = \mathfrak{A}_\Delta \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, da $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} \vee (\mathfrak{A}\mathfrak{B})_\Delta$, ist somit auch $\mathfrak{A}_\Delta \cup \mathfrak{X} = \mathfrak{A}_\Delta \mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{Y}$ vertauschbar. Entsprechend ergibt sich $\mathfrak{B}_\Lambda \mathfrak{Y} \vee \mathfrak{X}$. Nun ist $K(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_\Delta \mathfrak{X}) \leq \Lambda \cap \Delta$ und $K(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_\Lambda \mathfrak{Y}) \leq \Lambda \cap \Delta$, somit nach 2.10 auch $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{X}$.

b) Die Voraussetzung ermöglicht eine Zerlegung von I in fremde Mengen

$\wedge, \Delta$, so daß $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{X}$ nur $\wedge$-Köpfe, $\mathfrak{B}$ über $\mathfrak{Y}$ nur Δ-Köpfe besitzt. Wenn $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$ gilt, ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, woraus sofort $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{Y}$, $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{X}$ folgt. - Wir setzen jetzt $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{X}$ voraus. Die Vertauschbarkeit von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ folgt bereits aus 2.17 b).

(1) Wir beweisen die restliche Behauptung $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$ zunächst unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß $K(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}) \leq \wedge$ gilt. Wegen $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{Y} = \mathfrak{B}\mathfrak{X}$. Da $\mathfrak{Y} \leq \mathfrak{B} \leq \mathfrak{Y}\mathfrak{A}$ ist, ergibt sich, wenn zur Abkürzung $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{D}$ gesetzt wird: $\mathfrak{B} = \mathfrak{B} \cap (\mathfrak{Y}\mathfrak{A}) = \mathfrak{Y}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) = \mathfrak{Y}\mathfrak{D}$. Wegen $\mathfrak{Y} \vee \mathfrak{D}$ ist nach 1.6 a) auch $\mathfrak{Y} \vee \mathfrak{D}_\wedge$. Aus $\mathfrak{Y} \leq \mathfrak{Y}\mathfrak{D}_\wedge \leq \mathfrak{Y}\mathfrak{D} = \mathfrak{B}$ und $K(\mathfrak{Y}\mathfrak{D}, \mathfrak{Y}\mathfrak{D}_\wedge) \leq \wedge$ zusammen mit der Voraussetzung, daß $\mathfrak{B}$ über $\mathfrak{Y}$ nur Δ-Köpfe besitzt, folgt weiter $\mathfrak{Y}\mathfrak{D}_\wedge = \mathfrak{B}$. Nun ist $\mathfrak{D}_\wedge \leq \mathfrak{A}_\wedge \leq \mathfrak{X}$, also $\mathfrak{D}_\wedge \leq \mathfrak{D} \cap \mathfrak{X}$ und offenbar $\mathfrak{B} = (\mathfrak{D} \cap \mathfrak{X})\mathfrak{Y}$. Hieraus folgt $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{X}\mathfrak{B} = \mathfrak{X}(\mathfrak{D} \cap \mathfrak{X})\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, also $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$.

(2) Nun soll b) mit Hilfe von (1) allgemein bewiesen werden. Aus $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{Y}$, $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{X}$ ist nur noch die Vertauschbarkeit von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ zu folgern. Diese ist offenbar gewährleistet, wenn alle Gruppen $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_{\wedge\Delta\wedge\Delta\cdots\wedge}$ und $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_{\wedge\Delta\wedge\Delta\cdots\Delta}$ mit allen $\mathfrak{Y}\mathfrak{B}_{\Delta\wedge\Delta\wedge\cdots\wedge}$ und $\mathfrak{Y}\mathfrak{B}_{\Delta\wedge\Delta\wedge\cdots\Delta}$ vertauschbar sind. Wir beweisen dies, indem wir mittels Induktion nach n zeigen: Für alle $n \geq 0$ und alle $i, j \leq n$ sind die Gruppen $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_{\wedge\Delta\wedge\Delta\cdots\overset{\wedge}{\Delta}}$ (i-mal) $= \mathfrak{X}\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{Y}\mathfrak{B}_{\Delta\wedge\Delta\wedge\cdots\overset{\wedge}{\Delta}}$ (j-mal) $= \mathfrak{Y}\mathfrak{B}_j$ vertauschbar. Für $n = 0$ ist $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{Y}\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ ist schon als richtig erkannt. Nun sei $n \geq 1$ und die Behauptung bereits bewiesen für $\nu \leq n-1$. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

α) n ist ungerade. Dann ist offenbar $K(\mathfrak{X}\mathfrak{A}_{n-1}, \mathfrak{X}\mathfrak{A}_n) \leq \wedge$, $K(\mathfrak{Y}\mathfrak{B}_{n-1}, \mathfrak{Y}\mathfrak{B}_n) \leq \Delta$. Da $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{X}$ und nach 1.6 a) $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}_n$ gilt, ist auch $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{X}\mathfrak{A}_n$, und die Induktionsvoraussetzung ergibt für jedes $j \leq n-1$ $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_{n-1} \vee \mathfrak{Y}\mathfrak{B}_j$. Für $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_n \leq \mathfrak{X}\mathfrak{A}_{n-1}$ und $\mathfrak{Y}\mathfrak{B}_j \leq \mathfrak{B}$ sind jetzt die Voraussetzungen von (1) erfüllt, folglich ist $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_n \vee \mathfrak{Y}\mathfrak{B}_j$ für alle $j \leq n-1$. Wegen der völligen Symmetrie der Voraussetzungen erhält man auf entsprechende Weise $\mathfrak{Y}\mathfrak{B}_n \vee \mathfrak{X}\mathfrak{A}_i$ für alle $i \leq n-1$. Mit $i = j = n-1$ gilt insbesondere $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_n \vee \mathfrak{Y}\mathfrak{B}_{n-1}$, $\mathfrak{Y}\mathfrak{B}_n \vee \mathfrak{X}\mathfrak{A}_{n-1}$,

und nach a) folgt dann auch die allein noch übrig gebliebene Behauptung $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_n \vee \mathfrak{Y}\mathfrak{B}_n$.

β) n ist gerade. Wegen $n \geq 1$ ist jetzt sogar $n \geq 2$, ferner $K(\mathfrak{X}\mathfrak{A}_{n-1}, \mathfrak{X}\mathfrak{A}_n) \leq \Delta$, $K(\mathfrak{Y}\mathfrak{B}_{n-1}, \mathfrak{Y}\mathfrak{B}_n) \leq \Lambda$. Wie unter α) folgt $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{X}\mathfrak{A}_n$, und, da $n-1 \geq 1$, nach Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_{n-2} \vee \mathfrak{Y}\mathfrak{B}_1$. $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_{n-2}$ besitzt über $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_n$ keine Δ-Köpfe und $K(\mathfrak{B}, \mathfrak{Y}\mathfrak{B}_1) \leq \Delta$. Nach (1) ist daher $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_n \vee \mathfrak{Y}\mathfrak{B}_1$. Gemäß Induktionsannahme ist weiter für jedes j, $1 \leq j \leq n-1$, $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_{n-1} \vee \mathfrak{Y}\mathfrak{B}_j$. Dies zusammen mit $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_n \vee \mathfrak{Y}\mathfrak{B}_1$ liefert wiederum nach (1) $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_n \vee \mathfrak{Y}\mathfrak{B}_j$. Die Symmetrie der Voraussetzungen ergibt ebenso für alle i mit $1 \leq i \leq n-1$ $\mathfrak{Y}\mathfrak{B}_n \vee \mathfrak{X}\mathfrak{A}_i$. Diese Vertauschbarkeitseigenschaften gelten offenbar auch für i = j = 0. Für i = j = n-1 ist nun $\mathfrak{Y}\mathfrak{B}_n \vee \mathfrak{X}\mathfrak{A}_{n-1}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_n \vee \mathfrak{Y}\mathfrak{B}_{n-1}$, und hieraus ergibt sich abschließend nach a) $\mathfrak{X}\mathfrak{A}_n \vee \mathfrak{Y}\mathfrak{B}_n$. Damit ist der Beweis von b) beendet.

Zum Schluß dieses Abschnitts sei noch auf eine Möglichkeit hingewiesen, wie der Satz 2.10 und davon abgeleitete Sätze ein wenig verallgemeinert werden können. Dazu definieren wir: Ist $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ und $K(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) \leq \Delta$, so heißt der Verband $\{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{X} \lhd\lhd \mathfrak{B}\}$ ein Δ-Stück von $\mathfrak{G}$. Wir zeichnen nun eine beliebige subnormale Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ aus und nennen eine Primzahl p für den Augenblick $\mathfrak{G}$-$\mathfrak{H}$-kritisch, wenn ein nichtmodulares p-Stück von $\mathfrak{G}$ oberhalb $\mathfrak{H}$ liegt. Dann erkennt man am Beweis von 2.10 leicht, daß folgende Verallgemeinerung gilt:

2.20 Es sei $\mathfrak{H} \lhd\lhd \mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ und $K(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) = \Delta$. In Δ möge keine $\mathfrak{G}$-$\mathfrak{H}$-kritische Primzahl liegen. Dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit denselben, $\mathfrak{H}$ enthaltenden subnormalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar.

In entsprechender Weise lassen sich die aus 2.10 folgenden Sätze verallgemeinern. So gilt zum Beispiel die Äquivalenz:

2.21 Es sei $\mathfrak{H} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $\Delta \leq I$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

a) Δ enthält keine kritische $\mathfrak{G}$-$\mathfrak{H}$-Primzahl.

b) Eine $\mathfrak{H}$ enthaltende subnormale Untergruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$, die über $\mathfrak{H}$ nur Δ-Köpfe besitzt, ist mit allen $\mathfrak{H}$ enthaltenden subnormalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar.

c) Zwei subnormale Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \geq \mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ sind immer dann vertauschbar, wenn jede einfache Gruppe, die als Kopf sowohl von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{H}$ als auch von $\mathfrak{B}$ über $\mathfrak{H}$ auftritt, in Δ liegt.

Wir wollen nur den Beweis b) $\Rightarrow$ c) andeuten. Die Menge $\bar{\Delta} = \Lambda$ läßt sich in fremde Teilmengen Λ_1, Λ_2 zerlegen, so daß $\mathfrak{A}_{\Lambda_2}\mathfrak{H} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_{\Lambda_1}\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ ist. Mittels Induktion und unter Benutzung von b) folgt analog dem Beweis von 1.7: $\mathfrak{A}_{\Lambda_1}\mathfrak{H} \vee \mathfrak{B}_{\Lambda_2}\mathfrak{H}$. Nach 1.1 a) ist dann auch $(\mathfrak{A}_{\Lambda_1}\mathfrak{H})_{\Lambda_1} = \mathfrak{A}_{\Lambda_1}\mathfrak{H}_{\Lambda_1} = \mathfrak{A}_{\Lambda_1}$ vertauschbar mit $(\mathfrak{B}_{\Lambda_2}\mathfrak{H})_{\Lambda_2} = \mathfrak{B}_{\Lambda_2}\mathfrak{H}_{\Lambda_2} = \mathfrak{B}_{\Lambda_2}$. Hieraus folgt $\mathfrak{A}_{\Lambda_2} \vee \mathfrak{B}_{\Lambda_1}$, also ist auch $\mathfrak{A}_{\Lambda_2}\mathfrak{H} = \mathfrak{A}$ vertauschbar mit $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{\Lambda_1}\mathfrak{H}$.

Auch 2.17 b) läßt sich in naheliegender Weise verallgemeinern.

3. Seminormale Untergruppen

Wir betrachten zunächst Ketten seminormaler Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Eine solche Kette $\mathfrak{E} = \mathfrak{A}_0 < \mathfrak{A}_1 < \cdots < \mathfrak{A}_{k-1} < \mathfrak{A}_k = \mathfrak{G}$ heißt maximal, wenn es für kein i, $0 \leq i \leq k-1$ eine seminormale Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ gibt mit $\mathfrak{A}_i < \mathfrak{B} < \mathfrak{A}_{i+1}$. Es gilt der Satz

3.1 $\mathfrak{E} = \mathfrak{A}_0 < \mathfrak{A}_1 < \cdots < \mathfrak{A}_{k-1} < \mathfrak{A}_k = \mathfrak{G}$ sei eine maximale Kette seminormaler Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Dann wird behauptet:

a) Es ist $\mathfrak{A}_i \trianglelefteq \mathfrak{A}_{i+1}$ für alle i = 0,1,..., k-1.

b) Die Faktorgruppen $\mathfrak{A}_{i+1}/\mathfrak{A}_i$, i = 0,1,..., k-1, sind einfache Gruppen oder p-Gruppen, wobei p eine kritische Primzahl für $\mathfrak{G}$ ist.

Beweis. a) Wir nehmen an, für ein i sei $\mathfrak{A}_i$ nicht normal in $\mathfrak{A}_{i+1}$. Dann gibt es ein $x \in \mathfrak{A}_{i+1}$ so daß $x^{-1}\mathfrak{A}_i x = \mathfrak{A}^x \neq \mathfrak{A}_i$ ist. Da $\mathfrak{A}_i$ in $\mathfrak{A}^x$ seminormal in $\mathfrak{G}$, denn wenn $\mathfrak{Z} \cdots \mathfrak{G}$, dann ist auch $\mathfrak{Z}^{x^{-1}} \cdots \mathfrak{G}$, also

$\mathfrak{A}_i \cup \mathfrak{B}^{X^{-1}} = \mathfrak{A}_i \mathfrak{B}^{X^{-1}} = \mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}^X = \mathfrak{A}_i^X \mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}_i^X$; somit ist auch das Erzeugnis $\mathfrak{A}_i \cup \mathfrak{A}_i^X = \mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_i^X$ seminormal in $\mathfrak{G}$. Wegen $\mathfrak{A}_i \neq \mathfrak{A}_i^X$ ist $\mathfrak{A}_i < \mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_i^X \leq \mathfrak{A}_{i+1}$, und da die Kette nach Voraussetzung maximal ist, folgt $\mathfrak{A}_{i+1} = \mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_i^X$. Wegen $X \in \mathfrak{A}_{i+1}$ ist X = YZ mit $Y \in \mathfrak{A}_i$, $Z \in \mathfrak{A}_i^X$. Hieraus folgt nach der Schlußweise von O. Ore [2, I, Satz 4] der gewünschte Widerspruch $\mathfrak{A}_i^X = (\mathfrak{A}_i^X)^{Z^{-1}} = \mathfrak{A}_i^Y = \mathfrak{A}_i$. Also ist für alle i $\mathfrak{A}_i \triangleleft \mathfrak{A}_{i+1}$.

b) Wir wählen für beliebiges $i \leq r-1$ eine subnormale Untergruppe $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{A}_i \leq \mathfrak{U} \triangleleft \mathfrak{A}_{i+1}$. Es sind nun zwei Fälle möglich:

(1) $\mathfrak{A}_{i+1}/\mathfrak{U}$ ist nichtabelsch einfach oder abelsch von Primzahlordnung q, wobei q keine kritische Primzahl für $\mathfrak{G}$ ist. Dann ist nach 2.10 auch $\mathfrak{U}$ seminormal in $\mathfrak{G}$ und die Voraussetzung ergibt $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{U}$.

(2) $\mathfrak{A}_{i+1}/\mathfrak{U}$ ist von Primzahlordnung p und p eine kritische Primzahl für $\mathfrak{G}$. Mit $\Pi = \{p\}$ ist dann $(\mathfrak{A}_{i+1})_\Pi \leq \mathfrak{U}$ und mit $\mathfrak{A}_{i+1}$ ist auch $(\mathfrak{A}_{i+1})_\Pi$ seminormal in $\mathfrak{G}$. Damit ist auch $\mathfrak{A}_i(\mathfrak{A}_{i+1})_\Pi$ seminormal und $\mathfrak{A}_i \leq \mathfrak{A}_i(\mathfrak{A}_{i+1})_\Pi \leq \mathfrak{U} \triangleleft \mathfrak{A}_{i+1}$, also wegen der Maximalität der gegebenen Kette $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_i(\mathfrak{A}_{i+1})_\Pi$, das heißt $(\mathfrak{A}_{i+1})_\Pi \leq \mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_{i+1}/\mathfrak{A}_i$ ist eine p-Gruppe.

Daß es in $\mathfrak{G}$ immer Kompositionsreihen gibt, deren sämtliche Glieder seminormal sind, zeigt der Satz

3.2 Es sei $\mathfrak{A}$ eine subnormale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit folgender Eigenschaft: Zwischen dem größten, in $\mathfrak{A}$ enthaltenen Normalteiler $\mathfrak{N} = \bigcap_{X \in \mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{A}X$ und dem kleinsten $\mathfrak{A}$ umfassenden Normalteiler $\mathfrak{M} = \bigcup_{X \in \mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{A}X$ von $\mathfrak{G}$ liegt kein von diesen verschiedener Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{A}$ seminormal in $\mathfrak{G}$. Somit gilt: Eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$, die durch Verfeinerung aus einer Hauptreihe von $\mathfrak{G}$ entstanden ist, besteht aus lauter in $\mathfrak{G}$ seminormalen Untergruppen.

Beweis. Wenn $\mathfrak{B} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{G}$ ist, haben wir $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ zu zeigen. Es ist $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{A} \leq \mathfrak{M}$, und wir können $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$ annehmen. Dann ist nach Voraussetzung $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{A}/\mathfrak{N} \triangleleft\triangleleft \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$. Nach

[8, Satz (1) b)] ist nun $\mathfrak{A}/\mathfrak{N} \leq \mathfrak{N}(\mathfrak{B}\mathfrak{N}/\mathfrak{N})$, wobei $\mathfrak{N}(\mathfrak{B}\mathfrak{N}/\mathfrak{N})$ der Normalisator von $\mathfrak{B}\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ ist. Insbesondere gilt also $\mathfrak{A}/\mathfrak{N} \vee \mathfrak{B}\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ und damit auch $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}\mathfrak{N}$. Wegen $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{A}$ ergibt sich hieraus $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$.

Mit Hilfe von 3.2 folgt

3.3 Es sei $\mathfrak{A} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{B} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$. Jedes Glied einer Kompositionsreihe (K) von $\mathfrak{B}$ sei mit $\mathfrak{A}$ und einer subnormalen Untergruppe $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{G}$ vertauschbar; ferner sei $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{L}$. Dann gibt es auch eine durch $\mathfrak{A}$ und (K) allein bestimmte Kompositionsreihe von $\mathfrak{A}$ bis $\mathfrak{B}$, deren sämtliche Glieder mit $\mathfrak{L}$ vertauschbar sind. Insbesondere gibt es zu jeder seminormalen Untergruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ eine aus lauter seminormalen Untergruppen bestehende Kompositionsreihe, die $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{G}$ verbindet.

Beweis. Es sei $\mathfrak{E} = \mathfrak{X}_0 \trianglelefteq \mathfrak{X}_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq \mathfrak{X}_k = \mathfrak{B}$ die Kompositionsreihe (K) von $\mathfrak{B}$. Sämtliche Glieder der Kette $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{X}_0 \leq \mathfrak{A}\mathfrak{X}_1 \leq \cdots \leq \mathfrak{A}\mathfrak{X}_k = \mathfrak{B}$ sind mit $\mathfrak{L}$ vertauschbar. Es ist $\mathfrak{X}_{i+1} \vee \mathfrak{A}\mathfrak{X}_i$, und nach 2.2 erhalten wir $j(\mathfrak{A}\mathfrak{X}_{i+1}, \mathfrak{A}\mathfrak{X}_i) = j(\mathfrak{A}\mathfrak{X}_i\, \mathfrak{X}_{i+1}, \mathfrak{A}\mathfrak{X}_i) = j(\mathfrak{X}_{i+1}, \mathfrak{X}_{i+1} \cap (\mathfrak{A}\mathfrak{X}_i)) = j(\mathfrak{X}_{i+1}, \mathfrak{X}_i(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{X}_{i+1}))$. Wegen $\mathfrak{X}_i \trianglelefteq\cdot\, \mathfrak{X}_{i+1}$ folgt hieraus $\mathfrak{A}\mathfrak{X}_i = \mathfrak{A}\mathfrak{X}_{i+1}$ oder $\mathfrak{A}\mathfrak{X}_i \trianglelefteq\cdot\, \mathfrak{A}\mathfrak{X}_{i+1}$. Die restliche Behauptung folgt aus 3.2.

Über einköpfige und einhütige seminormale Untergruppen gilt der folgende einfache Satz

3.4 a) Es sei $\mathfrak{N} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{A} \trianglelefteq\cdot\, \mathfrak{B} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$, und $\mathfrak{B}$ sei über $\mathfrak{N}$ einköpfig. Dann ist jede mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{N}$ vertauschbare subnormale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ auch mit $\mathfrak{A}$ vertauschbar. Insbesondere ist $\mathfrak{A}$ seminormal in $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{N}$ es sind.

b) Es sei $\mathfrak{A} \trianglelefteq\cdot\, \mathfrak{B} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{N} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{N}$ einhütig. Dann ist jede mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N}$ vertauschbare subnormale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ auch mit $\mathfrak{B}$ vertauschbar. Insbesondere ist $\mathfrak{B}$ seminormal in $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N}$ es sind.

Beweis. a) Für $\mathfrak{X} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$ sei $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{X}$, $\mathfrak{N} \vee \mathfrak{X}$. Mittels Induktion nach $j(\mathfrak{G}, \mathfrak{X})$

zeigen wir dann $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{X}$. Für $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ ist die Behauptung richtig. Ist $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{X}$, dann gilt $\mathfrak{X} < \mathfrak{N}\mathfrak{X}$. Da $\mathfrak{N}\mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{N}$ vertauschbar ist, gilt nach Induktionsannahme $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}\mathfrak{X}$ und daher $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{X}$. Also kann $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{X}$ angenommen werden und offenbar auch $\mathfrak{X} < \mathfrak{B}\mathfrak{X}$. Dann gibt es ein $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{X} \leq \mathfrak{M} \lhd \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{X}$, und es ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{X}(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{M})$. Da $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{B} \cap \mathfrak{M} < \mathfrak{B}$ ist und $\mathfrak{B}\mathfrak{M}/\mathfrak{M} \cong \mathfrak{B}/\mathfrak{B} \cap \mathfrak{M}$, folgt aus der Voraussetzung $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{A}$ und damit $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{X}$.

b) Induktion wie in a) ergibt o.B.d.A. $\mathfrak{A} < \mathfrak{X} < \mathfrak{N}\mathfrak{X}$. Mit $\mathfrak{X} \lhd \cdot \mathfrak{M} \lhd\lhd \mathfrak{N}\mathfrak{X}$ folgt entweder $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{X}$ oder $\mathfrak{A} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{X}$ und $\mathfrak{M} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{X}$. Daraus folgt $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{X}$.

Aus 3.2 und 3.4 ergibt sich nun leicht:

3.5 Es sei $\mathfrak{A} \lhd \cdot \mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$. $\mathfrak{A}$ sei einhütig, $\mathfrak{B}$ einköpfig. Dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in jeder Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ enthalten.

Beweis. (1) Wir zeigen zunächst: Ist $\mathfrak{X} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{A}$, dann ist $\mathfrak{X} \leq \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{X}$. Es sei $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{A}$, $\mathfrak{X} \not\leq \mathfrak{A}$. Nach 3.4 b) gilt dann auch $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{B}$. Wegen $\mathfrak{A}\mathfrak{X} > \mathfrak{A}$ ist $\mathfrak{A}\mathfrak{X} \geq \mathfrak{B}$, also $\mathfrak{A}\mathfrak{L} = \mathfrak{B}$. Jetzt gilt $j(\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \cap \mathfrak{X}) = j(\mathfrak{A}\mathfrak{X}, \mathfrak{X}) = j(\mathfrak{B}\mathfrak{X}, \mathfrak{X}) = j(\mathfrak{B}, \mathfrak{B} \cap \mathfrak{X})$, also $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{X} < \mathfrak{B} \cap \mathfrak{X}$. Wegen der Einköpfigkeit von $\mathfrak{B}$ ist dann $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{B}$, d.h. $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{X}$.

(2) Jetzt sei $\mathfrak{N} = \bigcap_{X \in \mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{A}X$ und $\mathfrak{M} = \bigcup_{X \in \mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{A}X$. Ist $\mathfrak{Z}$ ein beliebiger Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so gilt nach (1) $\mathfrak{Z} \leq \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{Z}$, also sogar $\mathfrak{Z} \leq \mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{Z}$. 3.2 zufolge ist nun $\mathfrak{A}$ seminormal in $\mathfrak{G}$ und für jedes $\mathfrak{X} \lhd\lhd \mathfrak{G}$ ergibt sich nach (1) nun $\mathfrak{X} \leq \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{X}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen nun aus der Existenz einer ausgezeichneten Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ auf die Seminormalität von einigen ihrer Glieder schließen.

3.6 Es sei $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{B} \lhd\lhd \mathfrak{G}$, $K(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) \leq \Delta$, $K(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}) \cup K(\mathfrak{A}, E) \leq \Lambda$ und $\Lambda \cap \Delta$ enthalte keine kritische Primzahl für $\mathfrak{G}$.

a) Es gebe eine subnormale Untergruppe $\mathfrak{L}$ zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, die in $\mathfrak{G}$ seminormal ist. Dann ist jedes $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{A} \lhd\lhd \mathfrak{X} \lhd\lhd \mathfrak{B}$, das mit allen zwischen

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gelegenen subnormalen Untergruppen vertauschbar ist, seminormal in $\mathfrak{G}$.

b) Der Verband $\{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{A} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{X} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{B}\}$ sei modular. Dann besitzt jeder Δ-Ausschnitt von $\mathfrak{G}$ einen modularen Subnormalteilerverband. Insbesondere sind entweder alle subnormalen Untergruppen zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seminormal in $\mathfrak{G}$ oder keine von ihnen.

Beweis. a) Mit $\mathfrak{L}$ ist auch $\mathfrak{L}_\Delta$ seminormal in $\mathfrak{G}$, ferner ist $\mathfrak{L}_\Delta \leq \mathfrak{A}$, und wegen $K(\mathfrak{A}, \mathfrak{L}_\Delta) \leq \Delta \cap \Lambda$ ist auch $\mathfrak{A}$ seminormal (2.10). Nun genüge $\mathfrak{X}$ den in a) gestellten Bedingungen und $\mathfrak{N} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$ sei beliebig. Es ist $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{A}(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{B}) \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{B}$, und daher nach Voraussetzung $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{B})$, also wegen $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{X}$ auch $\mathfrak{X} \vee (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{B})$. Außerdem ist $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}$ und $K(\mathfrak{N}, \mathfrak{N} \cap \mathfrak{B}) = K(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{N}, \mathfrak{B}) \leq \Lambda$, $K(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}) \leq \Delta$. Satz 2.19 a) zufolge ist nun auch $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{N}$.

b) Es sei $\mathfrak{N}/\mathfrak{X}$ ein Δ-Ausschnitt von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{X} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{U}, \mathfrak{W} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{N}$. Wir zeigen $\mathfrak{U} \vee \mathfrak{W}$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{U}_\Lambda \leq \mathfrak{G}_\Lambda \leq \mathfrak{B}$, ebenso $\mathfrak{W}_\Lambda \leq \mathfrak{B}$. Damit gilt $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{A} \cup \mathfrak{U}_\Lambda \leq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{A} \cup \mathfrak{W}_\Lambda \leq \mathfrak{B}$, und nach Voraussetzung ist daher $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{U}_\Lambda$ mit $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{W}_\Lambda$ vertauschbar, nach 1.6 a) also auch $(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{U}_\Lambda)_\Lambda = \mathfrak{A}_\Lambda \cup \mathfrak{U}_\Lambda = \mathfrak{U}_\Lambda$ mit $(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{W}_\Lambda)_\Lambda = \mathfrak{W}_\Lambda$. 1.6 b) ergibt jetzt auch $\mathfrak{U}_\Lambda \vee \mathfrak{W}$. Wegen $\mathfrak{U}_\Delta \leq \mathfrak{X} \leq \mathfrak{W}$ ist auch $\mathfrak{U}_\Delta \vee \mathfrak{W}$. Damit ist auch $\mathfrak{U}_\Delta \cup \mathfrak{U}_\Lambda = \mathfrak{U}_{\Delta\cap\Lambda}$ mit $\mathfrak{W}$ vertauschbar und nach 2.10 gilt schließlich $\mathfrak{U} \vee \mathfrak{W}$. Die letzte Behauptung von b) ergibt sich sofort aus 2.10.

In 3.6 ist schon die Frage enthalten, der wir uns jetzt zuwenden wollen, unter welchen Bedingungen nämlich die subnormalen Untergruppen $\mathfrak{X}$ einer seminormalen Untergruppe $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ auch seminormal in $\mathfrak{G}$ sind. Zum Beispiel hat das Erzeugnis $\mathfrak{M}$ minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ nach [8, Satz (1)] diese Eigenschaft, dagegen nicht jeder elementarabelsche Normalteiler, wie die nichtabelsche Gruppe der Ordnung p^3 $(p > 2)$ zeigt, deren sämtliche Elemente die Ordnung p haben.

Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium stellt der folgende einfache Satz dar:

3.7 $\mathfrak{M}$ sei seminormal in $\mathfrak{O}$ und $s\mathfrak{M}$ modular. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Jede subnormale Untergruppe von $\mathfrak{M}$ ist seminormal in $\mathfrak{O}$.

b) Für alle $\mathfrak{X} \in s\mathfrak{M}$, $\mathfrak{Y} \in s\mathfrak{O}$ gilt: $\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{X}\cup\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X} \cup (\mathfrak{M}\cap\mathfrak{Y})$.

Beweis. Wir setzen a) voraus. Für $\mathfrak{X} \in s\mathfrak{M}$, $\mathfrak{Y} \in s\mathfrak{O}$ ist dann $\mathfrak{X}\cup\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{M}\cap(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}\cup(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{Y})$, also b) richtig. Nun sei b) vorausgesetzt und $\mathfrak{X} \in s\mathfrak{M}$, $\mathfrak{Y} \in s\mathfrak{O}$. Da $s\mathfrak{M}$ modular ist, gilt nach 2.5 $\mathfrak{M}\cap(\mathfrak{X}\cup\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}\cup(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{Y})$. Aus $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{Y}$ folgt nun $(\mathfrak{X}\cup\mathfrak{Y})\cap(\mathfrak{Y}\mathfrak{M}) = \mathfrak{Y}(\mathfrak{M}\cap(\mathfrak{X}\cup\mathfrak{Y})) = \mathfrak{Y}(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{Y})\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}\mathfrak{X}$, also ist a) richtig.

Nun beweisen wir noch ein hinreichendes Kriterium.

3.8 a) Es sei $\mathfrak{M}$ seminormal in $\mathfrak{O}$ und $s\mathfrak{M}$ distributiv. Dann ist jedes $\mathfrak{A} \in s\mathfrak{M}$ seminormal in $\mathfrak{O}$.

b) Es sei $\mathfrak{M} \trianglelefteq \mathfrak{O}$ und $s\mathfrak{M}$ distributiv.

(1) Dann ist jedes $\mathfrak{X} \in s\mathfrak{M}$ normal in $\mathfrak{O}$, das nur abelsche Köpfe oder in $\mathfrak{M}$ nur abelsche Hüte besitzt.

(2) Ist $\mathfrak{X} \in s\mathfrak{M}$, $\mathfrak{Y} \in s\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y}$ auflösbar, dann ist $\mathfrak{X} \trianglelefteq \mathfrak{X}\cup\mathfrak{Y}$.

Beweis. a) Wir wenden Induktion nach $j(\mathfrak{M}, \mathfrak{A})$ an. Für $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$ ist nichts zu beweisen. Sonst gibt es ein $\mathfrak{B} \in s\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{A} \trianglelefteq \cdot \mathfrak{B} \leq \mathfrak{M}$ und nach Induktionsannahme ist $\mathfrak{B}$ seminormal in $\mathfrak{O}$. Nach 2.6 können wir annehmen, daß $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ von Primzahlordnung p ist, und mit $\pi = \{p\}$ ist auch $\mathfrak{B}_\pi$ seminormal in $\mathfrak{O}$. $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}_\pi$ ist gemäß [3, Satz (3.8)] eine zyklische p-Gruppe. Wegen $\mathfrak{B}_\pi \trianglelefteq \mathfrak{A} \trianglelefteq \cdot \mathfrak{B}$ sind jetzt die Voraussetzungen von 3.4 a) erfüllt und damit auch $\mathfrak{A}$ seminormal in $\mathfrak{O}$.

b) (1) Satz 1.10 zufolge genügt es zu zeigen, daß jedes $\mathfrak{X} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{M}$ in $\mathfrak{O}$ normal ist, das nur einen p-Kopf (in $\mathfrak{M}$ nur einen p-Hut) besitzt. Wir führen den Beweis für den Fall, daß $\mathfrak{X}$ ein-p-köpfig ist. Es gilt $\mathfrak{X}^* = \bigcup_{G\in\mathfrak{O}} G^{-1}\mathfrak{X}G \trianglelefteq \mathfrak{M}$ und nach 1.1 besitzt $\mathfrak{X}^*$ nur p-Köpfe. Weil $s\mathfrak{M}$ distributiv ist, folgt nach [3, Satz (3.8)] andererseits, daß $\mathfrak{X}^*$ sogar

ein-p-köpfig ist. Wäre $\mathfrak{X} < \mathfrak{X}^*$, dann auch $G^{-}\mathfrak{X}G < \mathfrak{X}^*$ für alle $G \in \mathfrak{G}$, also $\bigcup G^{-}\mathfrak{X}G < \mathfrak{X}^*$, was unmöglich ist. Daher ist $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X} \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{M}$ ein-p-hütig, so kommt man mit $\mathfrak{X}_* = \bigcap_{G \in \mathfrak{G}} G^{-}\mathfrak{X}G$ und 1.2 auf entsprechende Weise zum Ziel.

(2) Es sei $\mathfrak{X} \in s\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X} < \mathfrak{M}$, $\mathfrak{Y} \in s\mathfrak{G}$. Ist Δ die Menge der abelschen, Λ die Menge der nichtabelschen Gruppen aus $K(\mathfrak{G}, E)$, so ist nach 1.10 $\mathfrak{X} = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}$, wobei $\mathfrak{U}$ der Durchschnitt aller in $\mathfrak{M}$ ein-Δ-hütigen $\mathfrak{U}_i$ mit $\mathfrak{X} \trianglelefteq \mathfrak{U}_i \trianglelefteq \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ der Durchschnitt aller in $\mathfrak{M}$ ein-Λ-hütigen $\mathfrak{V}_i$ mit $\mathfrak{X} \trianglelefteq \mathfrak{V}_i \trianglelefteq \mathfrak{M}$ ist. Damit besitzt $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{M}$ nur Δ-Hüte und $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{M}$ nur Λ-Hüte, folglich ist $\mathfrak{U}^{\Lambda} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}^{\Delta} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{V}$. Nach (1) ist $\mathfrak{U} \trianglelefteq \mathfrak{G}$. $\mathfrak{U}^{\Delta} \cap \mathfrak{M}$ hat in $\mathfrak{M}$ nur Λ-Hüte, ist also nach 1.10 der Durchschnitt von in $\mathfrak{M}$ ein-Λ-hütigen $\mathfrak{M}_i \trianglelefteq \mathfrak{M}$ (O.B.d.A. ist $\mathfrak{U}^{\Delta} \cap \mathfrak{M} < \mathfrak{M}$). Aus $\mathfrak{M}_i \geq \mathfrak{X}$ folgt sogar $\mathfrak{M}_i \geq \mathfrak{V}$ und daher $\mathfrak{U}^{\Delta} \cap \mathfrak{M} \geq \mathfrak{V}$. Wegen $\mathfrak{X}^{\Delta} = (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V})^{\Delta} = \mathfrak{U}^{\Delta} \cap \mathfrak{V}^{\Delta} \geq \mathfrak{V}$ ist $K(\mathfrak{V}, \mathfrak{X}) \leq \Delta$. Mit $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ ist somit auch $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{V}^{\Delta} \cap \mathfrak{Y}$ auflösbar. Nach 1.17 ist daher $\mathfrak{V}^{\Delta} \trianglelefteq \mathfrak{V}^{\Delta} \cup \mathfrak{Y}$. Daraus folgt $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{V}^{\Delta} = \mathfrak{V} \trianglelefteq \mathfrak{V}^{\Delta} \cup \mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V} \trianglelefteq \mathfrak{V}^{\Delta} \cup \mathfrak{Y}$, also $\mathfrak{X} \trianglelefteq \mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$.

Daß die Aussagen des Satzes 3.8 a) ziemlich scharf sind, zeigt ein Beispiel von Wielandt [4, Abschnitt IV]. In der dortigen Bezeichnungsweise ist $\mathfrak{G}$ eine zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_5 \times \mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{S}_6$, wobei $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{S}_6$ die symmetrischen Permutationsgruppen von 5 bzw. 6 Ziffern sind und $\mathfrak{Z}$ die Ordnung 2 hat. $\mathfrak{S}_5$ und $\mathfrak{S}_6$ sind nichtvertauschbare subnormale Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Dabei ist jeder 2-Ausschnitt von $\mathfrak{M}$ zyklisch oder vom Typ (2,2).

Da $\mathfrak{S}_5$ in $\mathfrak{S}_5 \cup \mathfrak{S}_6 = \mathfrak{G}$ einen 2-Hut besitzt, jedoch $\mathfrak{S}_5 \cap \mathfrak{S}_6 = E$ in $\mathfrak{S}_6$ keinen, kann $\mathfrak{G}$ auch als das in der Anmerkung zu 1.9 angekündigte Beispiel gelten.

Literatur

1 Hall, M.: The Theory of Groups. Macmillan Company 1959.

2 Ore, O.: Contributions to the theory of groups of finite order. Duke Math. J. 5, 431 - 460 (1939).

3 Tamaschke, O.: Die Kongruenzrelationen im Verband der zugänglichen Subnormalteiler. Math. Z. 75, 115 - 126 (1961).

4 Wielandt, H.: Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. 45, 209 - 244 (1939).

5 Wielandt, H.: Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen. Math. Z. 55, 1 - 7 (1951).

6 Wielandt, H.: Vertauschbare nachinvariante Untergruppen. Abh. Math. Sem. Hamburg 21, 55 - 62 (1957).

7 Wielandt, H.: Sylowgruppen und Kompositions-Struktur. Abh. Math. Sem. Hamburg, 22, 215 - 228 (1958).

8 Wielandt, H.: Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen. Math. Z. 69, 463 - 465 (1958).

9 Zappa, G.: Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è modulare. Boll. Un. Mat. Ital. 11, (1956), S. 315 - 318.

10 Zassenhaus, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. 2. Aufl. 1958.

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung 1

1. Die Gruppen $\mathfrak{A}_\Delta$ und $\mathfrak{A}^\Delta$ 2

2. Die kritischen Primzahlen für $\mathfrak{N}$ 16

3. Seminormale Untergruppen 28

Literatur 35

Lebenslauf

Ich, Josef Hainzl, wurde am 6. Januar 1934 zu Reiterschlag in der Tschechoslowakei geboren. Meine Eltern besaßen dort - in einer durchweg deutschsprachigen Gegend - einen Bauernhof, den sie bis zu unserer Vertreibung im Jahre 1946 bewirtschafteten. In Walheim und später in Besigheim im Kreis Ludwigsburg fanden sie mit meinen fünf Geschwistern und mir eine neue Heimat. Ich besuchte zunächst das Progymnasium in Besigheim bis zur mittleren Reifeprüfung, dann das neusprachliche Friedrich-Schiller-Gymnasium in Ludwigsburg, wo ich im Frühjahr 1954 die Reifeprüfung ablegte. Im Sommersemester 1954 begann ich mein Studium der Mathematik und Physik an der Technischen Hochschule in Stuttgart und wurde am Ende des zweiten Semesters in die Studienstiftung des deutschen Volkes aufgenommen. Nach fünf Semestern in Stuttgart immatrikulierte ich mich im Wintersemester 1956/57 an der Universität Tübingen. Hier legte ich ein Jahr später die Vorprüfung in Philosophie ab und im Herbst 1959 das Staatsexamen in Mathematik als Haupt- und Doppelfach und Physik als Beifach. In meiner Zulassungsarbeit befaßte ich mich mit orthogonalen Polynomsystemen. Nach dem Staatsexamen begann ich, mich in die Gruppentheorie einzuarbeiten, und Herr Professor Wielandt lenkte meine Aufmerksamkeit auf die Frage der Vertauschbarkeit subnormaler Untergruppen. Unter seiner hilfreichen Anleitung entstand die vorliegende Arbeit. Außer Professor Wielandt waren meine akademischen Lehrer vor allem: In Mathematik die Professoren Kamke, Kneser, Müller, Pickert, Dozent Dr. Huppert (Tübingen); Baier, Lösch, Meyer-König, Schulz (Stuttgart). In Physik die Professoren Braunbek (Tübingen); Dehlinger, Kneser, Kulp (Stuttgart). In Philosophie die Professoren Bollnow, von Freytag gen. Löringhoff, Schulz (Tübingen).

Photodruck und Buchbinderarbeit der Photocopie GmbH., Stuttgart